

France métropolitaine. Septembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le tétraèdre $ABCD$ dont les sommets ont pour coordonnées :

$$A(1; -\sqrt{3}; 0); B(1; \sqrt{3}; 0); C(-2; 0; 0); D(0; 0; 2\sqrt{2}).$$

1) Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x + z\sqrt{2} = 4$.

2) On note \mathcal{D} la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a) Démontrer que \mathcal{D} est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O .

b) Déterminer les coordonnées du point G , intersection de la droite \mathcal{D} et du plan (ABD) .

3) a) On note L le milieu du segment $[AC]$.

Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC) .

b) Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.

4) Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.