France métropolitaine. Septembre 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.

On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

- 20 % des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte,
- 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris. On pose $a_0 = 0,5$ et $b_0 = 0,5$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte. On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1) Soit n un entier naturel.

a) Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$.

b) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c) En déduire que $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice que l'on précisera.

On admet sans démonstration que $U_n = M^n U_0$.

d) Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

2) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer P^2. En déduire que P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}P$.

b) Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$M^n = PD^nP^{-1}.$$

A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient

$$M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + 2 \times 0,7^n}{3} & \dfrac{1 - 0,7^n}{3} \\ \dfrac{2 - 2 \times 0,7^n}{3} & \dfrac{2 + 0,7^n}{3} \end{pmatrix}.$$

3) En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ?

France métropolitaine. Septembre 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) $a_1 = a_0 - 0,2a_0 + 0,1b_0 = 0,8a_0 + 0,1b_0 = (0,8 + 0,1) \times 0,5 = 0,9 \times 0,5 = 0,45$ et $b_1 = b_0 - 0,1b_0 + 0,2a_0 = 0,9b_0 + 0,2a_0 = (0,9 + 0,2) \times 0,5 = 0,55$. Donc,

$$\boxed{U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}.}$$

b) Soit n un entier naturel.

$$a_{n+1} = a_n - 0,2a_n + 0,1b_n = 0,8a_n + 0,1b_n,$$

et

$$b_{n+1} = b_n - 0,1b_n + 0,2a_n = 0,2a_n + 0,9b_n.$$

c) Soit n un entier naturel.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,1b_n \\ 0,2a_n + 0,9b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = MU_n$$

où $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}.}$$

d) D'après le résultat admis par l'énoncé, $U_3 = M^3U_0 = M^2 \times MU_0 = M^2 \times U_1$. Donc,

$$\begin{aligned} U_3 &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8 \times 0,8 + 0,1 \times 0,2 & 0,8 \times 0,1 + 0,1 \times 0,9 \\ 0,2 \times 0,8 + 0,9 \times 0,2 & 0,2 \times 0,1 + 0,9 \times 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,66 & 0,17 \\ 0,34 & 0,83 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,66 \times 0,45 + 0,17 \times 0,55 \\ 0,34 \times 0,45 + 0,83 \times 0,55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3905 \\ 0,6095 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{a_3 = 0,3905 \text{ et } b_3 = 0,6095.}$$

2) a)

$$\begin{aligned} P^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 & 1 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 2 \times 1 + (-1) \times 2 & 2 \times 1 + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3I_2. \end{aligned}$$

Donc $P \times \left(\frac{1}{3}P\right) = \left(\frac{1}{3}P\right) \times P = I_2$. Ceci montre que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{3}P$.

b)

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1,4 & -0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P^{-1}MP = D$ où D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^nP^{-1}$.

- D'après la question précédente, $P^{-1}MP = D$. Donc $PP^{-1}MPP^{-1} = PDP^{-1}$ puis $I_2MI_2 = PDP^{-1}$ et finalement $M^1 = PDP^{-1}$. La formule à démontrer est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $M^n = PD^nP^{-1}$ et montrons que $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times M^n \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

On a montré récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^nP^{-1}$.

3) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1 + 2 \times 0,7^n}{3} \times a_0 + \frac{1 - 0,7^n}{3} \times b_0 = 0,5\left(\frac{1 + 2 \times 0,7^n}{3} + \frac{1 - 0,7^n}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2 + 0,7^n}{3} \\ &= \frac{2 + 0,7^n}{6} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2 - 2 \times 0,7^n}{3} \times a_0 + \frac{2 + 0,7^n}{3} \times b_0 = 0,5\left(\frac{2 - 2 \times 0,7^n}{3} + \frac{2 + 0,7^n}{3}\right) \\ &= \frac{4 - 0,7^n}{6} \end{aligned}$$

Puisque $-1 < 0,7 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,7^n = 0$. Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Au bout d'un grand nombre de jours, la répartition des souris dans les compartiments A et B de la cage se stablisera, environ $\frac{1}{3}$ des souris occupant le compartiment A et $\frac{2}{3}$ des souris occupant le compartiment B.

