France métropolitaine. Septembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (commun à tous les candidats)

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1) Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.

On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

a) Déterminer la valeur de λ.

b) Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

c) Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

2) Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à $0,8$.

On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres.
La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

a) Préciser, en fonction de n, les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y, son espérance mathématique $E(Y)$ et son écart-type $\sigma(Y)$.

b) Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 64,8$ et d'écart-type $\sigma = 3,6$.

Calculer la probabilité p_1 de l'événement $\{Z \leqslant 71\}$ à l'aide de la calculatrice.

c) On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(Y \leqslant 70)$ de l'événement $\{Z \leqslant 70\}$.
Le restaurant a reçu 81 réservations.

Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent ?

France métropolitaine. Septembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) L'énoncé dit que $\mathrm{E}(X) = 10$ et donc $\dfrac{1}{\lambda} = 10$ puis $\lambda = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

b) La probabilité demandée est $p(10 \leqslant X \leqslant 20)$. On sait que pour tout réel t,

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda x}\right) - \left(-e^{0}\right) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Par suite,

$$p(10 \leqslant X \leqslant 20) = p(X \leqslant 20) - p(X \leqslant 10) = \left(1 - e^{-0,1\times 20}\right) - \left(1 - e^{-0,1\times 10}\right) = e^{-1} - e^{-2}.$$

La calculatrice donne

$$\boxed{p(10 \leqslant X \leqslant 20) = e^{-1} - e^{-2} = 0,2325 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

c) La probabilité demandée est $p_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15)$.

$$p_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15) = \frac{p((X \geqslant 10) \cap (X \geqslant 15))}{p(X \geqslant 10)} = \frac{p(X \geqslant 15)}{p(X \geqslant 10)} = \frac{1 - p(X \leqslant 15)}{1 - p(X \leqslant 10)} = \frac{e^{-0,1\times 15}}{e^{-0,1\times 10}} = \frac{e^{-1,5}}{e^{-1}} = e^{-1,5+1} = e^{-0,5}.$$

La calculatrice donne

$$\boxed{p_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15) = e^{-0,5} = 0,6065 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

2) a) L'énoncé dit que les paramètres de la loi Y sont n et $p = 0,8$. On sait alors que $\mathrm{E}(Y) = np = 0,8n$ et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{n \times 0,8 \times 0,2} = \sqrt{0,16n}$.

$$\boxed{\mathrm{E}(Y) = 0,8n \text{ et } \sigma(Y) = \sqrt{0,16n}.}$$

b) La calculatrice fournit $p_1 = p(Z \leqslant 71) = 0,9575$ arrondi à 10^{-4}.

c) Puisque le restaurant a une capacité d'accueil de 70 places, la probabilité demandée est $p(Y > 70)$.
Or $p(Y > 70) = 1 - p(Y \leqslant 70)$ avec $p(Y \leqslant 70) = 0,96$ à 10^{-2} près. Donc

$$p(Y > 70) = 0,04 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Le restaurant a environ 4 chances sur 100 de ne pas pouvoir accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent.

