France métropolitaine. Septembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) a) $f(x_A) = 0 + 1 + a \times 0 = 1 = y_A$. Donc, la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A.

b) Le coefficient directeur de la droite (AB) est

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{0-1} = -2.$$

c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 + 0 + a\left(1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x) \times e^{-x^2}\right) = 1 + a\left(1 - 2x^2\right)e^{-x^2} = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2}.$$

d) Puisque la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A est -2 d'après la question b). Ce coefficient directeur est aussi $f'(0)$ avec $f'(0) = 1 - a \times (-1) \times e^0 = 1 + a$ puis

$$f'(0) = -2 \Leftrightarrow 1 + a = -2 \Leftrightarrow a = -3.$$

$$\boxed{a = -3.}$$

2) a) Soit $x \in]-1, 0]$. $e^{-x^2} > 0$ et $-3x \geqslant 0$. Donc $-3xe^{-x^2} \geqslant 0$. D'autre part, $x > -1$ et donc $x + 1 > 0$. En additionnant, on obtient $f(x) > 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle }]-1\ ;\ 0],\ f(x) > 0.}$$

b) Soit $x \in]-\infty, -1]$. Alors $x \leqslant -1$ puis $x^2 \geqslant 1$ et donc $2x^2 - 1 \geqslant 2 \times 1 - 1$ ou encore $2x^2 - 1 \geqslant 1$. En particulier, $2x^2 - 1 \geqslant 0$. Comme d'autre part $3e^{-x^2} \geqslant 0$, on en déduit que $3\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2} \geqslant 0$ puis que $f'(x) \geqslant 1$. En particulier, $f'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle }]-\infty\ ;\ -1],\ f'(x) > 0.}$$

c) La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ -1\right]$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on sait que pour tout réel k de l'intervalle $\left[f\left(-\frac{3}{2}\right), f(-1)\right]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ -1\right]$.

Puisque $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2}e^{-9/4} = -0,02\ldots < 0$ et que $f(-1) = 3e^{-1} > 0$, le réel 0 appartient à l'intervalle $\left[f\left(-\frac{3}{2}\right), f(-1)\right]$. Ceci montre qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ -1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

Ensuite, $f\left(-\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}\right) = 0,01\ldots > 0$. Ainsi, $f\left(-\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}\right) > f(c)$ et les deux nombres c et $-\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}$ sont dans $]-\infty, -1]$.

Puisque f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, -1]$, on en déduit que $c < -\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}$.

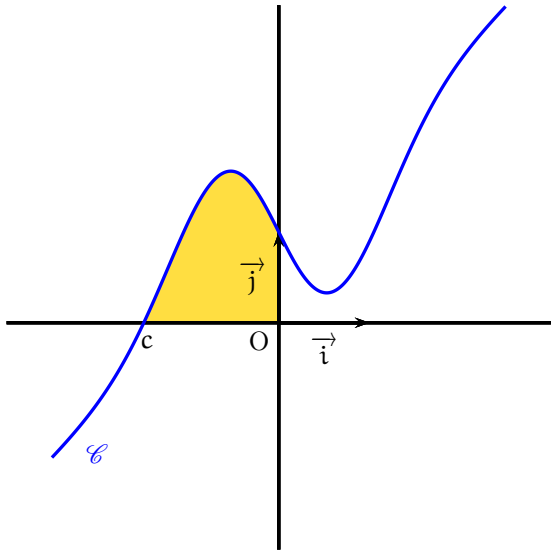
3) a) La fonction f est croissante sur $[c, -1]$ et $f(c) = 0$. Donc, la fonction f est positive sur l'intervalle $[c, -1]$. D'autre part, la fonction f est positive sur l'intervalle $[-1, 0]$ d'après la question 2) a) et finalement la fonction f est positive sur l'intervalle $[c, 0]$.

Ainsi, la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[c, 0]$ et donc $\mathscr{A} = \int_c^0 f(x)\,dx$.

b)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{3}{2}}^0 f(x)\,dx = \int_{-\frac{3}{2}}^0 \left(x + 1 + \frac{3}{2}(-2x)e^{-x^2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}e^{-x^2}\right]_{-\frac{3}{2}}^0 \\ &= \left(\frac{0^2}{2} + 0 + \frac{3}{2}e^0\right) - \left(\frac{(-3/2)^2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{-(-3/2)^2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{9}{8} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}} = \frac{15}{8} - \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}}. \end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.



 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.