

Antilles Guyane. Septembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (3 points) (commun à tous les candidats)

On considère l'équation (E_1) :

$$e^x - x^n = 0$$

où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1) Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) :

$$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

2) Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

Antilles Guyane. Septembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x strictement positif,

$$e^x - x^n = 0 \Leftrightarrow e^x = x^n \Leftrightarrow x = \ln(x^n) \Leftrightarrow x = n \ln(x) \Leftrightarrow \frac{x}{n} = \ln(x) \\ \Leftrightarrow \ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

Donc, sur $]0, +\infty[$, l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) : $\ln(x) - \frac{x}{n} = 0$.

2) Soit n un entier naturel non nul. Pour $x > 0$, posons $f_n(x) = \ln(x) - \frac{x}{n}$.

• La fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif,

$$f'_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n} = \frac{n-x}{nx} = -\frac{x-n}{nx}.$$

La fonction f'_n est strictement positive sur $]0, n[$ et strictement négative sur $]n, +\infty[$. On en déduit que la fonction f_n est strictement croissante sur $]0, n]$ et strictement décroissante sur $[n, +\infty[$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{n} = 0$. En additionnant, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(x) - \frac{x}{n} \right) = -\infty$.

• Pour tout réel $x > 0$,

$$f_n(x) = -\frac{x}{n} + \ln(x) = -\frac{x}{n} \left(1 - \frac{n}{x} \times \ln(x) \right) = -\frac{x}{n} \left(1 - n \frac{\ln(x)}{x} \right).$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - n \frac{\ln(x)}{x} \right) = 1 - n \times 0 = 1$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{n} = -\infty$. En multipliant, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$.

• $f_n(n) = \ln(n) - \frac{n}{n} = \ln(n) - 1$.

• On peut dresser le tableau de variation de la fonction f_n :

x	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	-
f_n		↗ $\ln(n) - 1$ ↘	↘ $-\infty$ ↗

On note que la fonction f_n admet un maximum en n égal à $\ln(n) - 1$.

• $f_n(n) < 0 \Leftrightarrow \ln(n) - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln(n) < 1 \Leftrightarrow n < e$ et $f_n(n) > 0 \Leftrightarrow n > e$.

Puisque $e = 2,7\dots$, si $n = 1$ ou $n = 2$, $f_n(n) < 0$ et si $n \geq 3$, $f_n(n) > 0$.

• Si $n = 1$ ou $n = 2$, la fonction f_n admet un maximum strictement négatif et en particulier, la fonction f_n ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. Dans ce cas, l'équation (E_1) n'a pas de solution dans $]0, +\infty[$.

Supposons dorénavant $n \geq 3$. La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]0, n]$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\infty$ et $f_n(n) > 0$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f_n s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]0, n]$ et même $]0, n[$. De même, la fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $]n, +\infty[$. De plus, $f_n(n) > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$. La fonction f_n s'annule donc une et une seule fois sur l'intervalle $]n, +\infty[$ et même $]n, +\infty[$. Finalement, la fonction f_n s'annule exactement deux fois dans l'intervalle $]0, +\infty[$ ou encore l'équation (E_1) a exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$.

On a montré que les entiers naturels n pour lesquels l'équation (E_1) admet deux solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 3.

