Antilles Guyane. Septembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.

À l'issue des tests, il est noté que

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1) Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.

2) Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est $0,8763$.

3) Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1) On sait que $P(D \leqslant 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
Calculer la valeur exacte de λ.

2) On prendra ici $\lambda = 0,173\,3$.
Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.

Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

1) Soit $X = \dfrac{J - 358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?

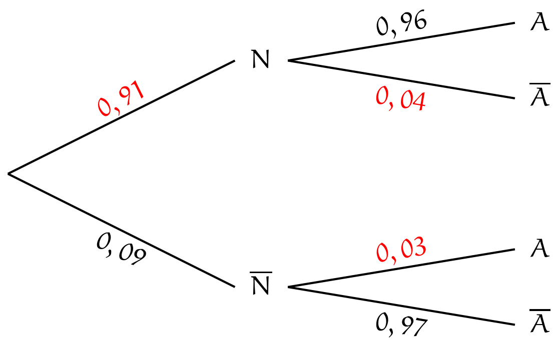
2) On sait que $P(J \leqslant 385) = 0,975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.

Antilles Guyane. Septembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) La probabilité demandée est $P(A)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A) = P(N \cap A) + P\left(\overline{N} \cap A\right) = P(N) \times P_N(A) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A) = (1 - 0,09) \times 0,96 + 0,09 \times (1 - 0,97)$$
$$= 0,91 \times 0,96 + 0,09 \times 0,03 = 0,8736 + 0,0027 = 0,8763.$$

$$\boxed{P(A) = 0,8763.}$$

3) La probabilité demandée est $P_A(N)$.

$$P_A(N) = \frac{P(A \cap N)}{P(A)} = \frac{P(N) \times P_N(A)}{P(A)} = \frac{0,91 \times 0,96}{0,8763} = 0,9969 \text{ arrondi au dix-millième.}$$

$$\boxed{P_A(N) = 0,996\,9 \text{ arrondi au dix-millième.}}$$

Partie B

1) L'égalité $P(D \leqslant 0,4) = 0,5$ signifie que l'on a une chance sur deux que la durée de vie d'une peluche soit inférieure ou égale à 4 ans.

On sait que pour tout réel positif t,

$$P(D \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Par suite,

$$P(D \leqslant 4) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-4\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-4\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow -4\lambda = \ln(0,5) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,5)}{4}.$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{\ln(0,5)}{4}.}$$

La calculatrice fournit $\lambda = 0,173\,28\ldots$

2) La probabilité demandée est $P_{D \geqslant 3}(D \geqslant 3 + 5)$.

$$P_{D \geqslant 3}(D \geqslant 8) = \frac{P((X \geqslant 3) \cap (X \geqslant 8))}{P(X \geqslant 3)} = \frac{P(X \geqslant 8)}{P(X \geqslant 3)} = \frac{1 - \left(1 - e^{-8\lambda}\right)}{1 - \left(1 - e^{-3\lambda}\right)} = \frac{e^{-8\lambda}}{e^{-3\lambda}}$$
$$= e^{-8\lambda + 3\lambda} = e^{-5\lambda} = e^{-5 \times 0,1733} = 0,4204 \text{ arrondi au dix-millième.}$$

$$\boxed{P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 8) = 0,4204 \text{ arrondi au dix-millième.}}$$

Partie C

1) On sait que X suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

2) $J \leqslant 385 \Leftrightarrow J - 358 \leqslant 27 \Leftrightarrow \dfrac{J-358}{\sigma} \leqslant \dfrac{27}{\sigma}$. La calculatrice fournit

$$P(J \leqslant 385) = 0,975 \Leftrightarrow P\left(X \leqslant \frac{27}{\sigma}\right) = 0,975 \Leftrightarrow \frac{27}{\sigma} = 1,9599\ldots \Leftrightarrow \sigma = 13,7\ldots$$

Donc

$$\boxed{\sigma = 14 \text{ arrondi à l'entier le plus proche.}}$$

