

Rochambeau 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Un volume constant de $2\,200\text{ m}^3$ d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique, on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de deux pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient $1\,100\text{ m}^3$ d'eau et le bassin B contient $1\,100\text{ m}^3$ d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B en début de journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin A est transféré vers le bassin B, et pour des raisons de maintenance, on transfère également 5 m^3 du bassin A vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin A à la fin du n -ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin B à la fin du n -ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 1\,100$ et $b_0 = 1\,100$.

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

- 1) Traduire la conservation du volume total d'eau du circuit par une relation liant a_n et b_n .
- 2) On utilise un tableur pour visualiser l'évolution du volume d'eau dans les bassins.
Donner les formules à écrire et à recopier vers le bas dans les cellules B3 et C3 permettant d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	Jour n	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1 100,00	1 100,00
3	1		
4	2	1 187,50	1 012,50
5	3	1 215,63	984,38
6	4	1 236,72	963,28
7	5	1 252,54	947,46
8	6	1 264,40	935,60
9	7	1 273,30	926,10
10	8	1 279,98	920,02
11	9	1 234,98	915,02
12	10	1 288,74	911,26
13	11	1 291,55	908,45
14	12	1 293,66	906,34
15	13	1 295,25	904,75
16	14	1 296,44	903,56
17	15	1 297,33	902,67
18	16	1 298,00	902,00
19	17	1 298,50	901,50
20	18	1 298,87	901,13

- 3) Quelles conjectures peut-on faire sur l'évolution du volume d'eau dans chacun des bassins ?

Partie B

On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $R = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = MX_n + R$.

1) On note $S = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $S = MS + R$.

En déduire que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} - S = M(X_n - S)$.

Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n , $X_n - S = M^n(X_0 - S)$ et que

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,75^n & 0,6 - 0,6 \times 0,75^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,75^n & 0,4 + 0,6 \times 0,75^n \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que, pour tout entier naturel n , $X_n = \begin{pmatrix} 1300 - 200 \times 0,75^n \\ 900 + 200 \times 0,75^n \end{pmatrix}$.

3) Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.

4) On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel n vérifie

$$1300 - a_n < 1,5 \text{ et } b_n - 900 < 1,5.$$

Déterminer le premier jour pour lequel le processus est stabilisé.

Rochambeau 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) Pour tout entier naturel n , $a_n + b_n = 2200$.

2)

	A	B	C
1	Jour n	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1 100,00	1 100,00
3	1	$=B_2-0,1*B_2+0,15*C_2-0,5$	$=C_2-0,15*C_2+0,1*B_2+0,5$
4	2	1 187,50	1 012,50
5	3	1 215,63	984,38
6	4	1 236,72	963,28
7	5	1 252,54	947,46
8	6	1 264,40	935,60
9	7	1 273,30	926,10
10	8	1 279,98	920,02
11	9	1 234,98	915,02
12	10	1 288,74	911,26
13	11	1 291,55	908,45
14	12	1 293,66	906,34
15	13	1 295,25	904,75
16	14	1 296,44	903,56
17	15	1 297,33	902,67
18	16	1 298,00	902,00
19	17	1 298,50	901,50
20	18	1 298,87	901,13

3) Il semble que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente de limite 1300 et que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente de limite 900.

Partie B

1)

$$\begin{aligned}
 MS + R &= \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \times 1300 + 0,15 \times 900 - 5 \\ 0,1 \times 1300 + 0,85 \times 900 + 5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix} = S.
 \end{aligned}$$

Soit n un entier naturel.

$$X_{n+1} - S = (MX_n + R) - (MS + R) = MX_n - MS = M(X_n - S).$$

2) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
X_n &= S + M^n(X_0 - S) \\
&= \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,75^n & 0,6 - 0,6 \times 0,75^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,75^n & 0,4 + 0,6 \times 0,75^n \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1300 \\ 1300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,75^n & 0,6 - 0,6 \times 0,75^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,75^n & 0,4 + 0,6 \times 0,75^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -200 \\ 200 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1300 - 200(0,6 + 0,4 \times 0,75^n) + 200(0,6 - 0,6 \times 0,75^n) \\ 900 - 200(0,4 - 0,4 \times 0,75^n) + 200(0,4 + 0,6 \times 0,75^n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1300 - 200(0,4 + 0,6)0,75^n \\ 900 + 200(0,4 + 0,6)0,75^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1300 - 200 \times 0,75^n \\ 900 + 200 \times 0,75^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3) Puisque $-1 < 0,75 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1300 - 200 \times 0 = 1300$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 900 + 200 \times 0 = 900$. Ceci valide les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.

4) Pour tout entier naturel n , $a_n = 1300 - 200 \times 0,75^n$ et $b_n = 900 + 200 \times 0,75^n$.

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
1300 - a_n < 1,5 &\Leftrightarrow 200 \times 0,75^n < 1,5 \Leftrightarrow 0,75^n < \frac{1,5}{200} \Leftrightarrow 0,75^n < 0,0075 \\
&\Leftrightarrow \ln(0,75^n) < \ln(0,0075) \text{ (par stricte croissance de } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow n \ln(0,75) < \ln(0,0075) \\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,0075)}{\ln(0,75)} \text{ (car } \ln(0,75) < 0) \\
&\Leftrightarrow n > 17,007\dots \\
&\Leftrightarrow n \geq 18 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

De même, $b_n - 900 < 1,5 \Leftrightarrow 200 \times 0,75^n < 1,5 \Leftrightarrow n \geq 18$.

Le processus est stabilisé à partir du 18-ème jour.