Rochambeau 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (6 points) (commun à tous les candidats)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1) Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $g(x) > 0$.

2) La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1) Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.

2) On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
Pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$, calculer $g'(x)$.

3) Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0;+\infty[$ que l'on déterminera.
En donner une interprétation graphique.

Partie C : étude d'une aire

On considère la fonction $\mathscr{A}$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$\mathscr{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t - 3)]\ dt.$$

1) Hachurer sur le graphique donné en **annexe 1 (à rendre avec la copie)** le domaine dont l'aire est donnée par $\mathscr{A}(2)$.

2) Justifier que la fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

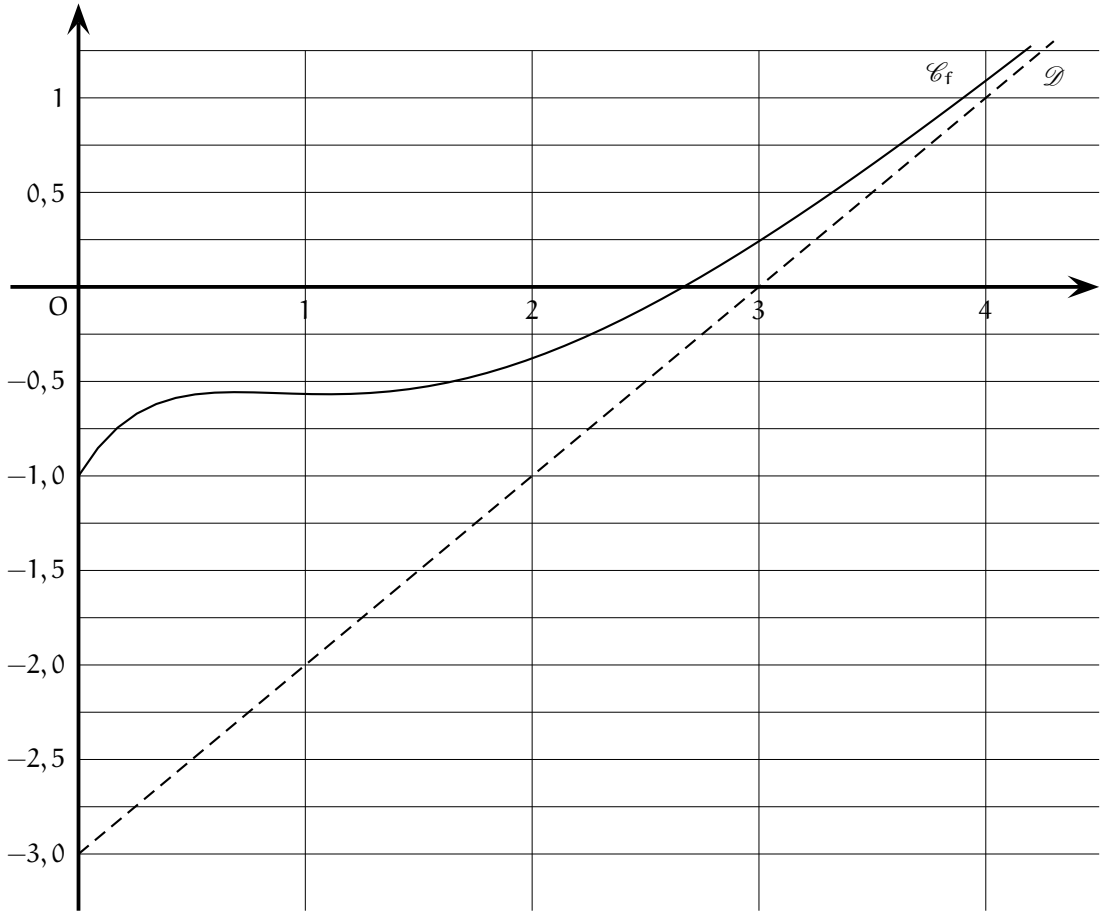
3) Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathscr{A}(x)$.

4) Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathscr{A}(x) = 2$?

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

ANNEXE 1

A rendre avec la copie



 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

Rochambeau 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A : positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

1) Soit x un réel positif.

$$g(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} = e^{-2x}(5e^x - 3) = 5e^{-2x}\left(e^x - \frac{3}{5}\right).$$

Puisque $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant 1$. En particulier, $e^x > \frac{3}{5}$ puis $e^x - \frac{3}{5} > 0$. D'autre part, $5e^{-2x} > 0$ et finalement $g(x) > 0$.

On a montré que por tout réel positif x, $g(x) > 0$.

2) Les abscisses des points communs à la courbe $\mathscr{C}_f$ et à la droite $\mathscr{D}$ sont les solutions de l'équation $f(x) = x - 3$ ou encore de l'équation $g(x) = 0$. D'après la question précédente, cette équation n'a pas de solution dans $[0, +\infty[$ et donc la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont pas de point commun.

Partie B : étude de la fonction g

1) Soit x un réel positif.

$$MN = |y_M - y_N| = |f(x) - (x-3)| = |g(x)| = g(x),$$

car $g(x) > 0$ d'après la partie A. Donc, pour tout réel positif x, la distance MN est égale à $g(x)$.

2) La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$g'(x) = 5 \times (-1) \times e^{-x} - 3 \times (-2) \times e^{-2x} = e^{-2x}\left(-5e^x + 6\right).$$

3) Pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^{-2x} > 0$ et donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, $g'(x)$ est du signe de $-5e^x + 6$. Donc,

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\Leftrightarrow -5e^x + 6 > 0 \Leftrightarrow -5e^x > -6 \Leftrightarrow 5e^x < 6 \Leftrightarrow e^x < \frac{6}{5} \\ &\Leftrightarrow x < \ln\left(\frac{6}{5}\right) \text{ (par stricte croissance de } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \end{aligned}$$

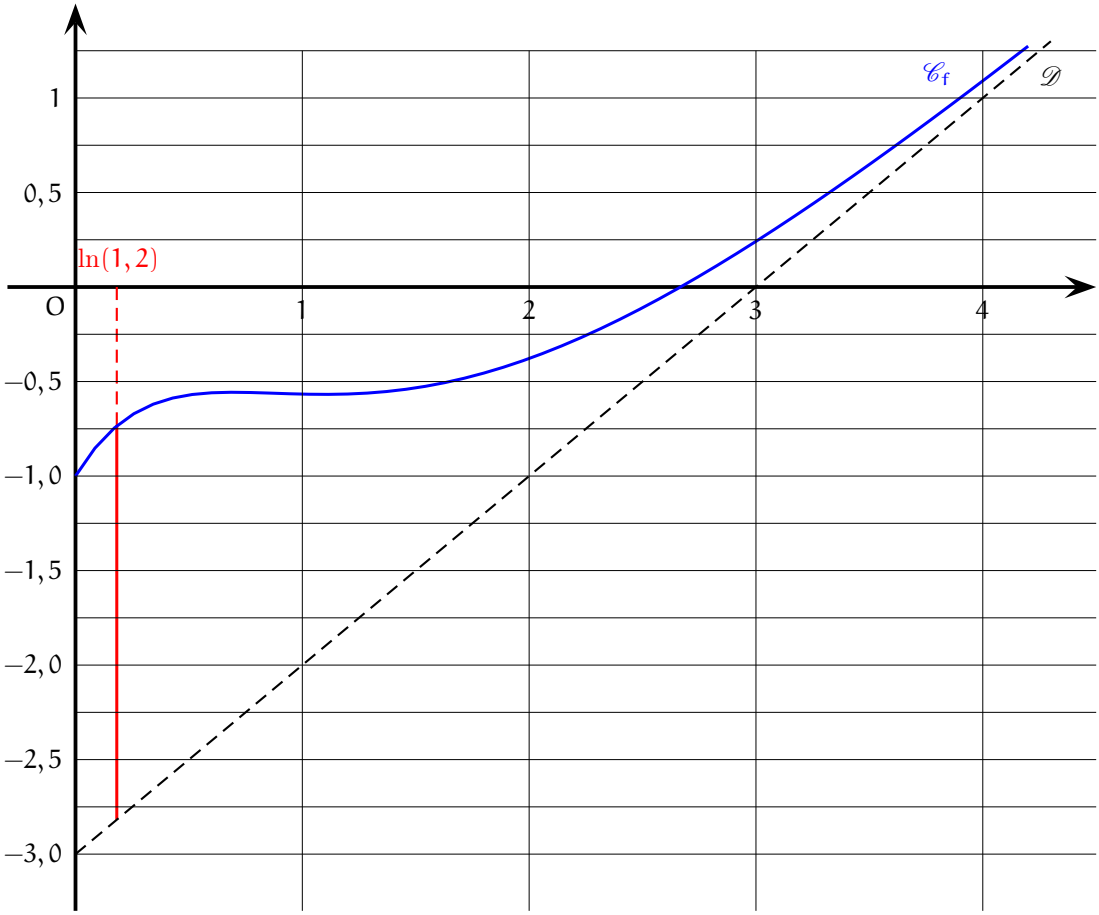
avec $\ln\left(\frac{6}{5}\right) > 0$ car $\frac{6}{5} > 1$. De même, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$ et $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{6}{5}\right)$.

Ainsi, la fonction g' est strictement positive sur $\left[0, \ln\left(\frac{6}{5}\right)\right[$, strictement négative sur $\left]\ln\left(\frac{6}{5}\right), +\infty\right[$ et s'annule en $\ln\left(\frac{6}{5}\right)$. On en déduit que la fonction g admet un maximum sur l'intervalle $[0; +\infty[$ atteint en $x_0 = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$. Ce maximum est égal à

$$\begin{aligned} g\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right) &= 5e^{-\ln\left(\frac{6}{5}\right)} - 3e^{-2\ln\left(\frac{6}{5}\right)} = \frac{5}{e^{\ln\left(\frac{6}{5}\right)}} - \frac{3}{\left(e^{\ln\left(\frac{6}{5}\right)}\right)^2} \\ &= \frac{5}{6/5} - \frac{3}{(6/5)^2} = \frac{25}{6} - \frac{25}{12} = \frac{25}{12}. \end{aligned}$$

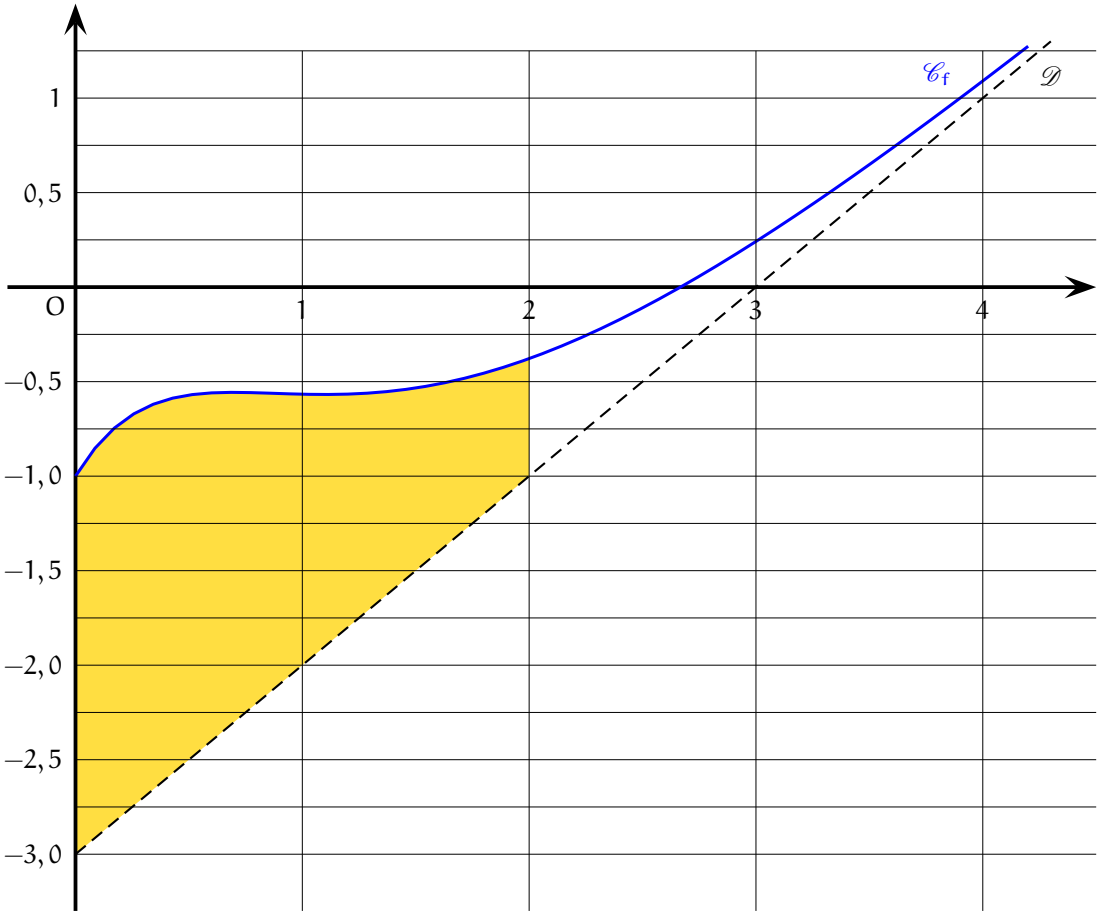
Donc, la fonction g admet sur $[0, +\infty[$ un maximum égal à $\frac{25}{12}$ et atteint en $x_0 = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$ ou encore la plus grande distance MN est égale à $\frac{25}{12}$ et est obtenue pour $x = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.



Partie C : étude d'une aire

1) Graphique.



 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

2) Soit x un réel positif. Puisque la fonction $g\ :\ t \mapsto f(t) - (t-3)$ est continue et positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$, on sait que

$$\mathscr{A}(x) = \int_0^x (f(t) - (t-3))\ dt = \int_0^x g(t)\ dt.$$

Puisque la fonction g est continue sur $[0,+\infty[$, on sait que la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $\mathscr{A}' = g$. Puisque la fonction g est strictement positive sur $[0,+\infty[$ d'après la partie A, la fonction $\mathscr{A}$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

3) Soit x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(x) &= \int_0^x \left(5e^{-t} - 3e^{-2t}\right)\ dt = \left[5 \times \frac{e^{-t}}{-1} - 3 \times \frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^x = \left[-5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\right]_0^x \\ &= \left(-5e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x}\right) - \left(-5e^{0} + \frac{3}{2}e^{0}\right) = \frac{7}{2} - 5e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ \mathscr{A}(x) = \frac{7}{2} - 5e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x}.}$$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathscr{A}(x) = \frac{7}{2} - 5 \times 0 + \frac{3}{2} \times 0 = 3,5$.

La fonction $\mathscr{A}$ est continue (car dérivable) sur $[0,+\infty[$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Donc, pour tout réel k de $\left[\mathscr{A}(0), \lim\limits_{x\to+\infty} \mathscr{A}(x)\right[= [0;3,5[$, l'équation $\mathscr{A}(x) = k$ a une solution et une seule dans $[0,+\infty[$.

Puisque $2 \in [0;3,5[$, il existe une valeur de x telle que $\mathscr{A}(x) = 2$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.