Pondichéry 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) La fonction f est décroissante sur $[-2,5;x_0]$ et croissante sur $[x_0;4,5]$ où x_0 est environ égal à $-0,5$. La fonction f' doit être négative sur $[-2,5;x_0]$ et positive sur $[x_0;4,5]$ ou encore la courbe $\mathscr{C}_2$ doit être au-dessous de l'axe des abscisses sur $[-2,5;x_0]$ et au-dessus de l'axe des abscisses sur $[x_0;4,5]$. Seule la courbe $\mathscr{C}_2$ de la situation 1 peut donc convenir.

2) Le point A de coordonnées $(0,2)$ est un point de la courbe représentative de f. Donc $f(0)=2$.
D'autre part, le point B de coordonnées $(0,1)$ est un point de la courbe représentative de f'. Donc $f'(0)=1$.

L'équation réduite de la droite Δ est $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ou encore $y=x+2$.

$$\boxed{\text{L'équation réduite de la droite } \Delta \text{ est } y=x+2.}$$

3) a) L'égalité $f(0)=2$ fournit $e^0+b=2$ et donc $b=1$.

b) Pour tout réel x, $f'(x)=-e^{-x}+a$. L'égalité $f'(0)=1$ fournit $-1+a=1$ et donc $a=2$. On a montré que

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x)=e^{-x}+2x+1.}$$

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x)=-e^{-x}+2.$$

Soit x un réel.

$$\begin{aligned}
f'(x)>0 &\Leftrightarrow -e^{-x}+2>0 \Leftrightarrow e^{-x}<2\\
&\Leftrightarrow -x<\ln(2) \text{ (par stricte croissance de la fonction logarithme népérien sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow x>-\ln(2).
\end{aligned}$$

De même, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\ln(2)$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty,-\ln(2)]$ et stritement croissante sur $[\ln(2),+\infty[$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.}$$

Partie B

1) a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x)=f'(x)-1=-e^{-x}+2-1=-e^{-x}+1.$$

Si $x>0$, alors $-x<0$ puis $e^{-x}<1$ et donc $-e^{-x}+1>0$. Si $x<0$, alors $-x>0$ puis $e^{-x}>1$ et donc $-e^{-x}+1<0$. Ainsi, la fonction g' est strictement négative sur $]-\infty,0[$ et stritement positive sur $]0,+\infty[$. On en déduit que la fonction g est stritement décroissante sur $]-\infty,0]$ et stritement croissante sur $[0,+\infty[$.

On en déduit que la fonction g admet un minimum en $x=0$. Ce minimum est égal à $g(0)$ avec $g(0)=f(0)-2=0$.

b) Par suite, la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$. Puisque pour tout réel x, $g(x)=f(x)-(x+2)$, on en déduit que pour tout réel x, $f(x)\geqslant x+2$ et donc que la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de la droite Δ sur $\mathbb{R}$.

2) Notons $\mathscr{A}$ l'aire demandée. Les fonctions $f\ :\ x\mapsto e^{-x}+2x+1$ et $h\ :\ x\mapsto x+2$ sont continues sur $[-2,2]$ et de plus, d'après la question précédente, pour tout réel x de $[-2,2]$, $f(x)\geqslant h(x)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}&=\int_{-2}^{2}(f(x)-h(x))\,dx=\int_{-2}^{2}(e^{-x}+2x+1-x-2)\,dx=\int_{-2}^{2}(e^{-x}+x-1)\,dx\\
&=\left[-e^{-x}+\frac{x^2}{2}-x\right]_{-2}^{2}=\left(-e^{-2}+\frac{2^2}{2}-2\right)-\left(-e^{2}+\frac{(-2)^2}{2}+2\right)\\
&=e^2-e^{-2}-4.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}=e^2-e^{-2}-4=3,25 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.