Pondichéry 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 3 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébés. Trois marques X, Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.

On note : X_n l'événement « la marque X est utilisée le mois n »,

Y_n l'événement « la marque Y est utilisée le mois n »,

Z_n l'événement « la marque Z est utilisée le mois n ».

Les probabilités des événements X_n, Y_n et Z_n sont notées x_n, y_n et z_n.

La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.

Un acheteur de la marque X le mois n, a le mois suivant :

- 50% de chances de rester fidèle à cette marque,
- 40% de chances d'acheter la marque Y,
- 10% de chances d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Y le mois n, a le mois suivant :

- 30% de chances de rester fidèle à cette marque,
- 50% de chances d'acheter la marque X,
- 20% de chances d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Z le mois n, a le mois suivant :

- 70% de chances de rester fidèle à cette marque,
- 10% de chances d'acheter la marque X,
- 20% de chances d'acheter la marque Y.

1) a) Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.
On admet que $y_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n$ et $z_{n+1} = 0,1x_n + 0,2y_n + 0,7z_n$.

b) Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n. En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2) On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

On admet que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $U_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n et i des entiers naturels A, B et U des matrices
Entrée et initialisation :	Demander la valeur de n i prend la valeur 0 A prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ B prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$
Traitement :	Tant que $i < n$ U prend la valeur $A \times U + B$ i prend la valeur $i + 1$ Fin de Tant que
Sortie :	Afficher U

a) Donner les résultats affichés par cet algorithme pour $n = 1$ puis pour $n = 3$.

b) Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril ?

Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n.
On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - A$.

3) On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

a) Démontrer que $C = A \times C + B$ équivaut à $N \times C = B$.

b) On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}$.

En déduire que $C = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$.

4) On note V_n la matrice telle que $V_n = U_n - C$ pour tout entier naturel n.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = A \times V_n$.

b) On admet que $U_n = A^n \times (U_0 - C) + C$.
Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai ?

Pondichéry 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) Soit n un entier naturel. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= p\left(X_{n+1}\right) = p\left(X_n \cap X_{n+1}\right) + p\left(Y_n \cap X_{n+1}\right) + p\left(Z_n \cap X_{n+1}\right)\\ &= p\left(X_n\right) \times p_{X_n}\left(X_{n+1}\right) + p\left(Y_n\right) \times p_{Y_n}\left(X_{n+1}\right) + p\left(Z_n\right) \times p_{Z_n}\left(X_{n+1}\right)\\ &= 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1z_n.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ x_{n+1} = 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1z_n.}$$

b) Soit n un entier naturel. On a $p\left(X_n\right) + p\left(Y_n\right) + p\left(Z_n\right) = 1$ ou encore $x_n + y_n + z_n = 1$ puis $z_n = 1 - x_n - y_n$. On en déduit que

$$x_{n+1} = 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1z_n = 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1\left(1 - x_n - y_n\right) = 0,4x_n + 0,4y_n + 0,1,$$

et

$$y_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2\left(1 - x_n - y_n\right) = 0,2x_n + 0,1y_n + 0,2.$$

2) a) Quand $n = 1$, l'algorithme affiche la valeur de $U_1 = A \times U_0 + B$.

$$\begin{aligned}U_1 &= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 \\ 0,2 \times 0,5 + 0,1 \times 0,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,33 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Quand $n = 3$, l'algorithme affiche la valeur de U_3.

$$\begin{aligned}U_2 &= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \times 0,42 + 0,4 \times 0,33 \\ 0,2 \times 0,42 + 0,1 \times 0,33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,317 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}U_3 &= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,317 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \times 0,4 + 0,4 \times 0,317 \\ 0,2 \times 0,4 + 0,1 \times 0,317 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0,3868 \\ 0,3117 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Quand $n = 1$, l'algorithme affiche $\begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,33 \end{pmatrix}$ et quand $n = 3$, l'algorithme affiche $\begin{pmatrix} 0,3868 \\ 0,3117 \end{pmatrix}$.

b) La probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril est x_3. D'après la question précédente, $x_3 = 0,3868$.

3) a)

$$\begin{aligned}C = A \times C + B &\Rightarrow C - A \times C = A \times C - A \times C + B \Rightarrow I \times C - A \times C = B \Rightarrow (I - A) \times C = B\\ &\Rightarrow N \times C = B.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}N \times C = B &\Rightarrow (I - A) \times C = B \Rightarrow C - A \times C = B \Rightarrow C - A \times C + A \times C = A \times C + B\\ &\Rightarrow C = A \times C + B.\end{aligned}$$

Finalement, $C = A \times C + B$ équivaut à $N \times C = B$.

b) $N \times C = B \Rightarrow N^{-1} \times N \times C = N^{-1} \times B \Rightarrow I \times C = N^{-1} \times B \Rightarrow C = N^{-1} \times B$.
Réciproquement, $C = N^{-1} \times B \Rightarrow N \times C = N \times N^{-1} \times B \Rightarrow N \times C = I \times B \Rightarrow N \times C = B$.

Finalement, $C = A \times C + B$ équivaut à $C = N^{-1} \times B$.

b)

$$C = N^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \dfrac{45}{23} & \dfrac{20}{23} \\ \dfrac{10}{23} & \dfrac{30}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{45}{23} \times 0,1 + \dfrac{20}{23} \times 0,2 \\ \dfrac{10}{23} \times 0,1 + \dfrac{30}{23} \times 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8,5}{23} \\ \dfrac{7}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{17}{46} \\ \dfrac{7}{23} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $C = \begin{pmatrix} \dfrac{17}{46} \\ \dfrac{7}{23} \end{pmatrix}$.

4) a) Soit n un entier naturel.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C = (A \times U_n + B) - (A \times C + B) = A \times U_n - A \times C = A \times (U_n - C) = A \times V_n.$$

b) Les probabilités demandées sont x_4, y_4 et z_4.

$$\begin{aligned} U_4 &= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,3868 \\ 0,3117 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \times 0,3868 + 0,4 \times 0,3117 \\ 0,2 \times 0,3868 + 0,1 \times 0,3117 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3794 \\ 0,30853 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $x_4 = 0,3794$, $y_4 = 0,30853$ et enfin $z_4 = 1 - x_4 - y_4 = 0,31207$.

$$\boxed{x_4 = 0,3794,\ y_4 = 0,30853 \text{ et } z_4 = 0,31207.}$$

