Pondichéry 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (4 points) (commun à tous les candidats)

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1) La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.
Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice, on prendra $0,081$ pour valeur de λ.

2) a) Déterminer $P(X \geqslant 3)$.

b) Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$.

c) Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

Dans la suite de l'exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à 10^{-3}.

3) L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égale à 1%. Afin de vérifier cette information, 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.

Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier.
On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

Pondichéry 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) Soit t un réel positif. On sait que

$$P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t},$$

et donc aussi

$$P(X \geqslant t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 2) = 0,15 &\Leftrightarrow 1 - e^{-2\lambda} = 0,15 \Leftrightarrow e^{-2\lambda} = 0,85 \Leftrightarrow -2\lambda = \ln(0,85) \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}\ln(0,85). \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{1}{2}\ln(0,85) = 0,08 \text{ arrondi au centième.}}$$

2) a) $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 3) = e^{-0,081\times 3} = e^{-0,243}$.

$$\boxed{P(X \geqslant 3) = e^{-0,243} = 0,78 \text{ arrondi au centième.}}$$

b) Soient t et h deux réels positifs.

$$\begin{aligned} P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) &= \frac{P\left((X \geqslant t) \cap (X \geqslant t+h)\right)}{P(X \geqslant t)} = \frac{P\left(X \geqslant t+h\right)}{P(X \geqslant t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t - \lambda h + \lambda t} = e^{-\lambda h} \\ &= P(X \geqslant h). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous réels positifs } t \text{ et } h,\ P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h).}$$

c) La probabilité demandée est $P_{X\geqslant 3}\left(X \geqslant 3+2\right)$. D'après la question précédente

$$P_{X\geqslant 3}\left(X \geqslant 3+2\right) = P(X \geqslant 2) = e^{-0,081\times 2} = e^{-0,162}.$$

$$\boxed{P_{X\geqslant 3}\left(X \geqslant 3+2\right) = e^{-0,162} = 0,85 \text{ arrondi au centième.}}$$

d) On sait que l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.
Ici, $E(X) = \frac{1}{0,081} = 12,35$ arrondi au centième.

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{0,081} = 12,35 \text{ arrondi au centième.}}$$

Ceci signifie qu'en moyenne, un moteur a une durée de vie d'environ 12 ans et quatre mois.

3) Ici $n = 800$. D'autre part, on suppose que $p = 0,01$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 8$ et $n(1-p) = 792$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

L'intervalle de fluctuation au seuil 95% associé est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,01 - 1,96\frac{\sqrt{0,01\times 0,99}}{\sqrt{800}}, 0,01 + 1,96\frac{\sqrt{0,01\times 0,99}}{\sqrt{800}}\right].$$

En arrondissant à 10^{-3} de manière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,003; 0,017]$.

La fréquence de moteurs défectueux dans l'échantillon est $f = \frac{15}{800} = 0,018\ldots$

f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et donc le résultat du test remet en question l'annonce de l'entreprise A au risque de se tromper de 5%.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.