Polynésie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1) Calculer u_1 et u_2.

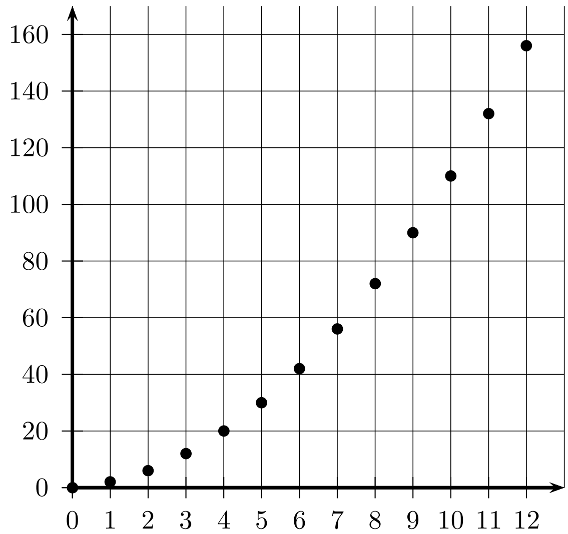
2) On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		Algorithme 2	
Variables	n est un entier naturel u est un réel	**Variables**	n est un entier naturel u est un réel
Entrée	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement	u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	**Traitement :**	u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n - 1$: u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
Sortie	Afficher u	**Sortie**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3) À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



a) Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.

b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.

Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4) On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b) On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n + 1)(n + 2)$.

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

Polynésie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 2 = 2$ et $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 2 = 6$.

$$\boxed{u_1 = 2 \text{ et } u_2 = 6.}$$

2) A la première étape, l'algorithme 1 calcule $0 + 2 \times 1 + 2$ qui n'est pas u_1 et l'algorithme 2 calcule $0 + 2 \times 0 + 1$ qui est u_1. Le bon algorithme est l'algorithme 2.

3) a) Il semble que la suite (u_n) soit strictement croissante.

Soit n un entier naturel. $u_{n+1} - u_n = 2n + 2$. Puisque n est un entier naturel, $2n + 2 > 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n > 0$ ou enfin $u_{n+1} > u_n$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$ et donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) L'égalité $u_0 = 0$ fournit $c = 0$. Ensuite,

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = 2 \\ u_2 = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = 2 \\ 4a + 2b = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 2 - a \\ 2a + (2 - a) = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

Donc si la conjecture est exacte, alors pour tout entier naturel n

$$u_n = n^2 + n = n(n+1).$$

4) a) On a vu que pour tout entier naturel n, $v_n = 2n + 2$. Mais alors, pour tout entier naturel n

$$v_{n+1} - v_n = (2(n+1) + 2) - (2n + 2) = 2.$$

La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.

b) Soit n un entier naturel.

1ère solution. (si on connaît une formule générale)

$$S_n = \frac{(v_0 + v_n) \times (n+1)}{2} = \frac{(2 + 2n + 2) \times (n+1)}{2} = \frac{(2n+4) \times (n+1)}{2} = (n+2)(n+1).$$

2ème solution. (si on ne connaît qu'une formule)

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \times 0 + 2 + 2 \times 1 + 2 + \ldots + (2 \times n + 2) = 2(0 + 1 + \ldots + n) + (\underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{n+1}) \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+2)(n+1). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ S_n = (n+1)(n+2).}$$

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$.

- $S_0 = v_0 = u_1 - u_0$. Donc la formule à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $S_n = u_{n+1} - u_0$ et montrons que $S_{n+1} = u_{n+2} - u_0$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= v_0 + v_1 + \ldots + v_n + v_{n+1} = S_n + v_{n+1} = S_n + u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= u_{n+1} - u_0 + u_{n+2} - u_{n+1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_{n+2} - u_0. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$. On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = S_n = (n+1)(n+2)$ ou encore, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = ((n-1) + 1)((n-1) + 2) = n(n+1).$$

Enfin, $0 \times (0 + 1) = 0 = u_0$ et donc

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = n(n+1).}$$

