Nouvelle Calédonie. Novembre 2014. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) X suit une loi binomiale. En effet,

- 2 000 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « le cône est défectueux » avec une probabilité $p = 0,003$ et « le cône n'est pas défectueux » avec une probabilité $1 - p = 0,997$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 2\ 000$ et $p = 0,003$.

2) La probabilité demandée est $p\,(X \leqslant 11)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{p\,(X \leqslant 11) = 0,980 \text{ arrondi au millième.}}$$

Partie B

Soit $Z = \dfrac{Y - 110}{\sigma}$. On sait que Z suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

$$104 \leqslant Y \leqslant 116 \Leftrightarrow -6 \leqslant Y - 110 \leqslant 6 \Leftrightarrow -\frac{6}{\sigma} \leqslant \frac{Y-110}{\sigma} \leqslant \frac{6}{\sigma} \Leftrightarrow -\frac{6}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{6}{\sigma},$$

et donc $p(104 \leqslant Y \leqslant 116) = p\left(-\dfrac{6}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{6}{\sigma}\right)$. L'énoncé donne $p\left(-\dfrac{6}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{6}{\sigma}\right) = 0,98$. Pour des raisons de symétrie, $p\left(Z \leqslant -\dfrac{6}{\sigma}\right) = \dfrac{1 - 0,98}{2} = 0,01$ et donc

$$p\left(Z \leqslant \frac{6}{\sigma}\right) = p\left(Z \leqslant -\frac{6}{\sigma}\right) + p\left(-\frac{6}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{6}{\sigma}\right) = 0,98 + 0,01 = 0,99.$$

La calculatrice fournit $\dfrac{6}{\sigma} = 2,32\ldots$ ou encore $\sigma = 2,57\ldots$ et donc

$$\boxed{\sigma = 2,6 \text{ à } 10^{-1} \text{ près par excès.}}$$

Partie C

Ici, $n = 900$ et $f = \dfrac{795}{900} = \dfrac{53}{60}$. On note que $n \geqslant 30$ puis $nf = 795$ et donc $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) = 105$ et donc $n(1-f) \geqslant 5$.

L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ ou encore $\left[\dfrac{53}{60} - \dfrac{1}{30}, \dfrac{53}{60} + \dfrac{1}{30}\right]$ ou encore $\left[\dfrac{51}{60}, \dfrac{55}{60}\right]$ ou enfin $[0,85; 0,91\ldots]$. La probabilité $p = 0,84$ n'appartient pas à l'intervalle de confiance et donc on ne peut pas affirmer, au niveau de confiance de 95 %, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010.

EXERCICE 2

Affirmation 1	**VRAI**
Affirmation 2	**FAUX**
Affirmation 3	**VRAI**
Affirmation 4	**VRAI**
Affirmation 5	**FAUX**

Justification 1.

1ère solution. $|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$-1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}(-1+i)^{10} &= \left(\sqrt{2}\right)^{10}\times\left(e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)^{10} = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^5\times e^{\frac{3i\pi\times 10}{4}} = 2^5e^{\frac{15i\pi}{2}}\\ &= 32e^{\frac{16i\pi}{2}-i\frac{\pi}{2}} = 32e^{8i\pi-i\frac{\pi}{2}} = 32e^{-i\frac{\pi}{2}}\\ &= -32i.\end{aligned}$$

En particulier, le point d'affixe $(-1+i)^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire. L'affirmation 1 est vraie.

2ème solution. $(-1+i)^2 = (-1)^2-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i$ puis

$$(-1+i)^{10} = \left((-1+i)^2\right)^5 = (-2i)^5 = (-2)^5i^5 = -32\times i^2\times i^2\times i = -32i.$$

2) Justification 2. Soit z un nombre complexe. Posons $z = x+iy$ où x et y sont deux réels.

$$z-\overline{z}+2-4i = (x+iy)-(x-iy)+2-4i = 2iy+2-4i = 2+i(2y-4).$$

En particulier, la partie réelle de $z-\overline{z}+2-4i$ est égale à 2. Cette partie réelle n'est pas nulle. Mais alors, $z-\overline{z}+2-4i$ n'est jamais nul ou encore l'équation $z-\overline{z}+2-4i = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$. L'affirmation 2 est fausse.

3) Justification 3.

$$\ln\left(\sqrt{e^7}\right)+\frac{\ln\left(e^9\right)}{\ln\left(e^2\right)} = \frac{1}{2}\ln\left(e^7\right)+\frac{9}{2} = \frac{7}{2}+\frac{9}{2} = 8$$

et

$$\frac{e^{\ln 2+\ln 3}}{e^{\ln 3-\ln 4}} = \frac{e^{\ln 6}}{e^{\ln(3/4)}} = \frac{6}{3/4} = \frac{24}{3} = 8.$$

Donc l'affirmation 3 est vraie.

4) Justification 4.

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{e^x+2}\,dx &= \int_0^{\ln 3}\frac{(e^x+2)'}{e^x+2}\,dx = \left[\ln\left(e^x+2\right)\right]_0^{\ln 3} = \ln\left(e^{\ln 3}+2\right)-\ln\left(e^0+2\right)\\ &= \ln(3+2)-\ln(1+2) = \ln(5)-\ln(3) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) = -\ln\left(\frac{3}{5}\right).\end{aligned}$$

Donc l'affirmation 4 est vraie.

5) Justification 5.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned}\ln(x-1)-\ln(x+2) = \ln 4 &\Leftrightarrow \ln(x-1) = \ln 4+\ln(x+2) \Leftrightarrow \ln(x-1) = \ln(4(x+2))\\ &\Leftrightarrow x-1 = 4(x+2) \text{ et } x-1>0\\ &\Leftrightarrow -3x = 9 \text{ et } x>1 \Leftrightarrow x=-3 \text{ et } x>1.\end{aligned}$$

Puisque $-3 \leqslant 1$, l'équation proposée n'a pas de solution. Donc l'affirmation 5 est fausse.

EXERCICE 3

1) a) Les coordonnées du point I sont $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}, \dfrac{y_A+y_B}{2}, \dfrac{z_A+z_B}{2},\right)$ ou encore $(1,1,1)$.

De même, les coordonnées de J sont $(3,3,-1)$.

Notons (x,y,z) les coordonnées du point K.

$$\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-1=\dfrac{1}{3}(-5-1)\\ y-2=\dfrac{1}{3}(5-2)\\ z-3=\dfrac{1}{3}(0-3)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1\\ y=3\\ z=2\end{array}\right.$$

$$\boxed{\mathrm{I}(1,1,1),\ \mathrm{J}(3,3,-1) \text{ et } \mathrm{K}(-1,3,2).}$$

b) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ sont $(2,2,-2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IK}$ sont $(-2,2,1)$.
S'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{IK}=\lambda\overrightarrow{IJ}$, alors $-2=2\lambda$ (en analysant la première coordonnée) et donc $\lambda=0$ et aussi $2=2\lambda$ (en analysant la deuxième coordonnée) et donc $\lambda=1$. Ceci est impossible et donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points I, J et K ne sont pas alignés.

On a montré que les points I, J et K définissent un plan.

c)

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IJ}=3\times 2+1\times 2+4\times(-2)=(3+1-4)\times 2=0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IJ}=3\times(-2)+1\times 2+4\times 1=-6+2+4=0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) et donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

Le plan (IJK) est le plan passant par $\mathrm{I}(1,1,1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(3,1,4)$. Une équation cartésienne du plan (IJK) est donc $3(x-1)+(y-1)+4(z-1)=0$ ou encore $3x+y+4z-8=0$.

$$\boxed{\text{Une équation du plan (IJK) est } 3x+y+4z-8=0.}$$

2) a) La droite (BD) est la droite passant par $\mathrm{B}(1,2,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{BD}(10,-1,-5)$. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+10t\\ y=2-t\\ z=3-5t\end{array}\right., \quad t\in\mathbb{R}.$$

b) Soit $\mathrm{M}(1+10t, 2-t, 3-5t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite (BD).

$$\mathrm{M}\in\mathscr{P}\Leftrightarrow 3(1+10t)+(2-t)+4(3-5t)-8=0\Leftrightarrow 9t+9=0\Leftrightarrow t=-1.$$

Quand $t=-1$, on obtient les coordonnées du point L : $(-9,3,8)$.

$$\boxed{\text{Le point L a pour coordonnées } (-9,3,8).}$$

c) Les coordonnées du segment [LD] sont $\left(\dfrac{-9+11}{2}, \dfrac{3+1}{2}, \dfrac{8-2}{2}\right)$ ou encore $(1,2,3)$. Par suite, le milieu du segment [LD] est le point B ou encore le point L est le symétrique du point D par rapport au point B.

EXERCICE 4

1) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x,

$$f'(x) = 0 - 4 \times \frac{-1}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}.$$

La dérivée de f est positive sur $[0, +\infty[$ et donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

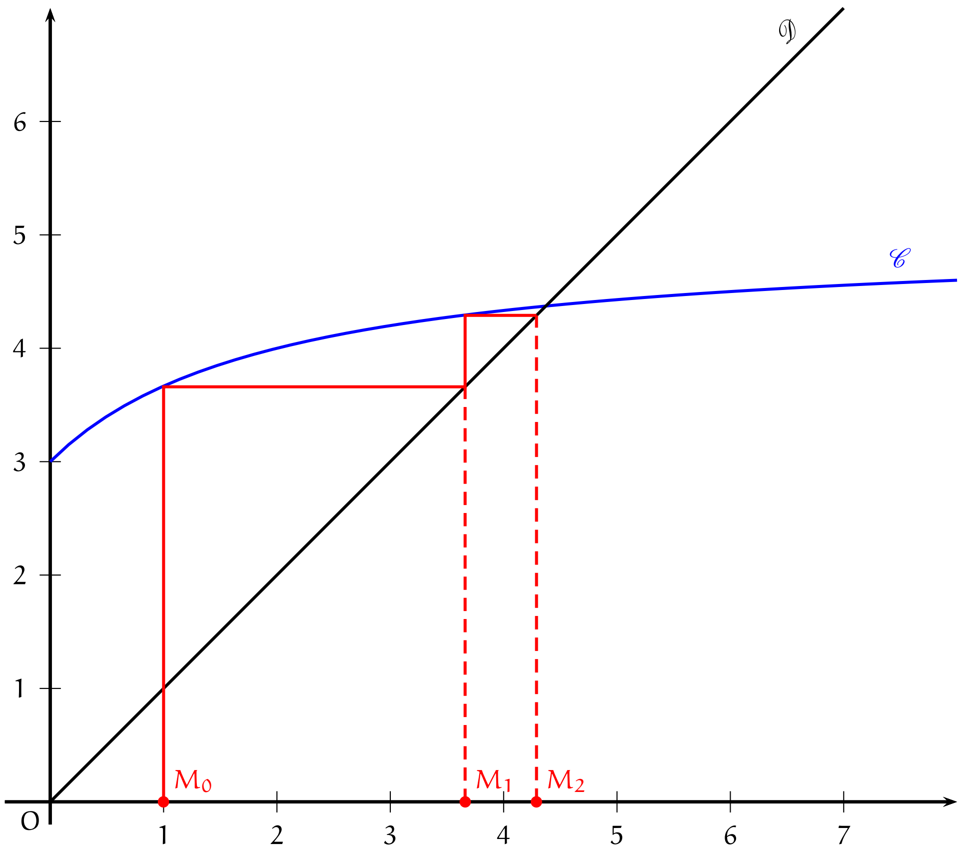
2) Soit x un réel positif.

$$\begin{aligned} f(x) = x \Leftrightarrow 5 - \frac{4}{x+2} = x \Leftrightarrow \frac{5(x+2)-4}{x+2} = x \Leftrightarrow 5x + 6 = x^2 + 2x \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 6 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $x^2 - 3x - 6 = 0$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 33$. L'équation $x^2 - 3x - 6 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes à savoir $x_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$ et $x_1 = \frac{3-\sqrt{33}}{2}$. x_1 est un réel positif et x_2 est un réel strictement négatif. Donc l'équation $x^2 - 3x - 6 = 0$ admet une et une seule solution positive à savoir le réel $\alpha = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$. La calculatrice fournit

$$\boxed{\alpha = \frac{3+\sqrt{33}}{2} = 4,37 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

3) Représentation graphique.



Il semble que la suite (u_n) soit croissante, convergente de limite α.

4) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

- $u_0 = 1$ et donc $u_0 \geqslant 0$. $u_1 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3} = 3,6\ldots$ Donc $u_1 \geqslant u_0$. Enfin, $\alpha = 4,3\ldots$ et donc $\alpha \geqslant u_1$. Ainsi, $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$. La propriété à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha &\Rightarrow f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha) \text{ (par croissance de la fonction } f \text{ sur } [0, +\infty[) \\
&\Rightarrow 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha \\
&\Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha.
\end{aligned}
$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par le réel α. Donc la suite (u_n) est convergente.

5) a) $S_0 = u_0 = 1$, $S_1 = u_0 + u_1 = 1 + \dfrac{11}{3} = \dfrac{14}{3} = 4,66$ à 10^{-2} près.

$u_2 = 5 - \dfrac{4}{\dfrac{11}{3} + 2} = 5 - \dfrac{12}{17} = \dfrac{73}{17}$ puis $S_2 = \dfrac{14}{3} + \dfrac{73}{17} = \dfrac{457}{51} = 8,96$ à 10^{-2} près.

b)Algorithme complété.

Entrée	n un entier naturel
Variables	u et s sont des variables réelles n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1 s prend la valeur u i prend la valeur 0 Demander la valeur de n
Traitement	Tant que $i < n$ Affecter à i la valeur $i + 1$ Affecter à u la valeur $5 - \dfrac{4}{u+2}$ Affecter à s la valeur $s + u$ Fin tant que
Sortie	Afficher s

c) La suite (u_n) est croissante. On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_0$ ou encore $u_n \geqslant 1$. Par suite, pour tout entier naturel n,

$$S_n \geqslant \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n+1 \text{ termes}} = n + 1.$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} (n + 1) = +\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty.}$$

