

Nouvelle Calédonie. Novembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe \mathcal{C} représentative de f ainsi que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$.

- 1) Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- 2) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$. On note α la solution.
On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
- 3) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
Sur la figure de l'**annexe 1**, en utilisant la courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} , placer les points M_0 , M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 .
Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
- 4) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

où α est le réel défini dans la question 2.

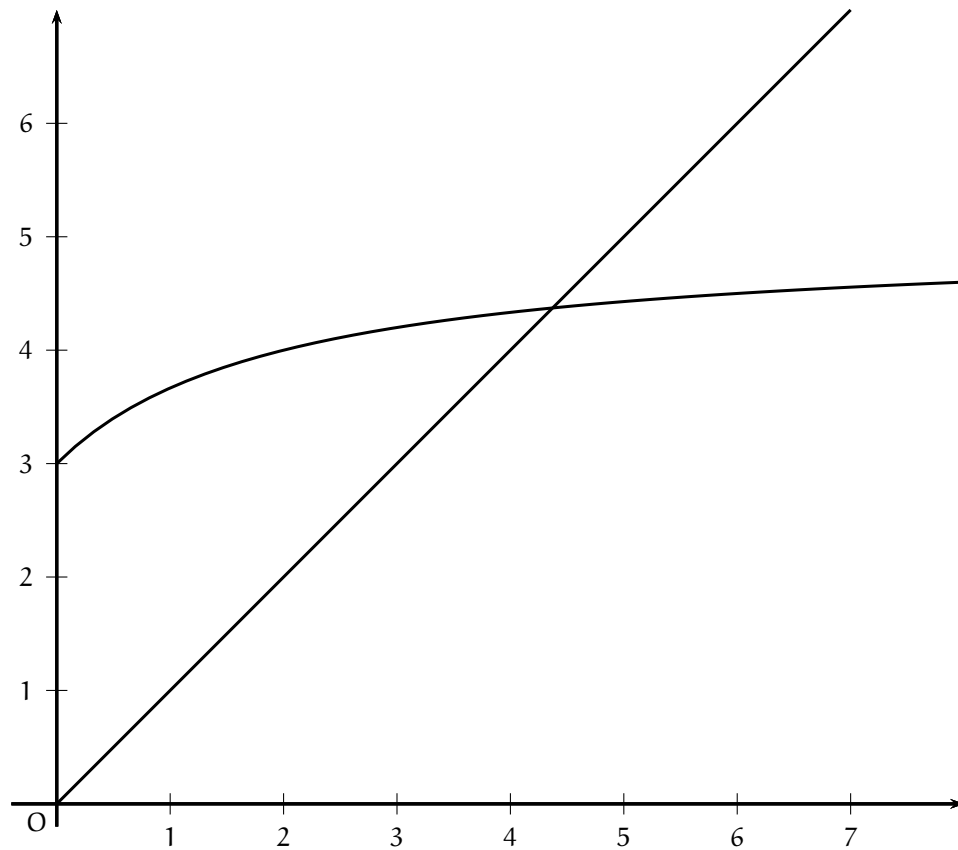
- b) Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ?
- 5) Pour tout entier naturel n , on définit la suite (S_n) par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

- a) Calculer S_0 , S_1 et S_2 . Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
- b) Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.
- c) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

FEUILLES ANNEXES

Annexe 1, exercice 4



Annexe 2, exercice 4

Entrée	n un entier naturel
Variables	u et s sont des variables réelles n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1 s prend la valeur u i prend la valeur 0 Demander la valeur de n
Traitement	Tant que ... Affecter à i la valeur i + 1 Affecter à u la valeur ... Affecter à s la valeur ... Fin tant que
Sortie	Afficher s

EXERCICE 4 : corrigé

1) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x ,

$$f'(x) = 0 - 4 \times \frac{-1}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}.$$

La dérivée de f est positive sur $[0, +\infty[$ et donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

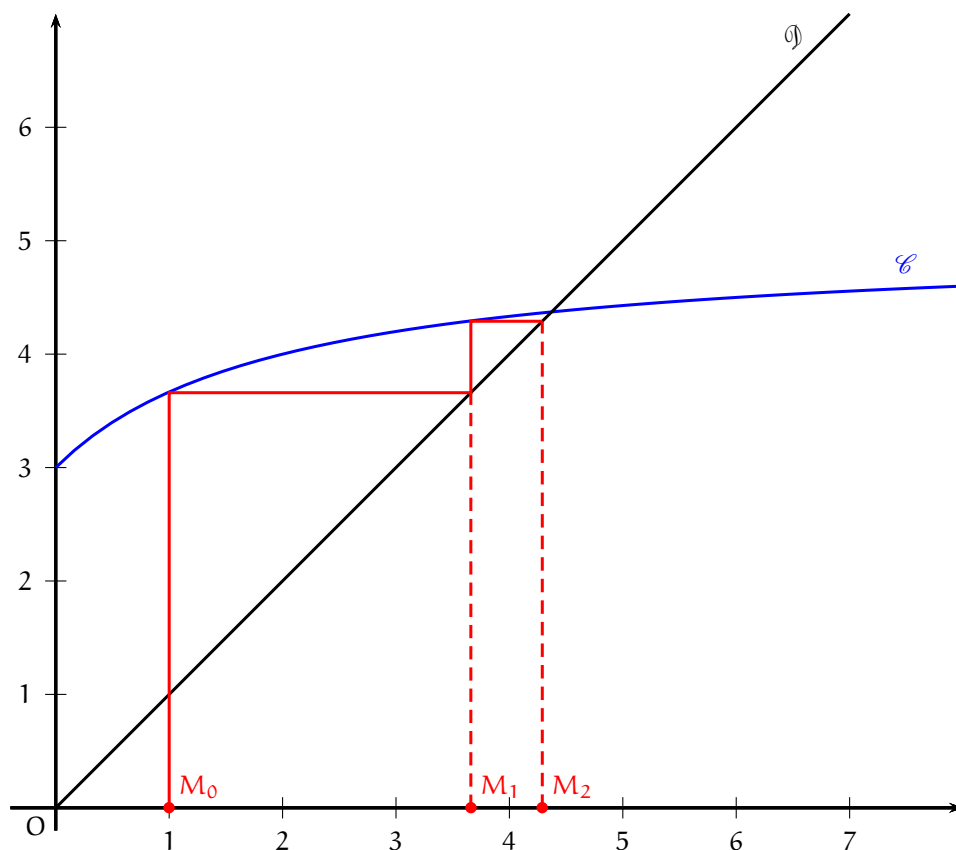
2) Soit x un réel positif.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow 5 - \frac{4}{x+2} = x \Leftrightarrow \frac{5(x+2) - 4}{x+2} = x \Leftrightarrow 5x + 6 = x^2 + 2x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 6 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $x^2 - 3x - 6 = 0$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 33$. L'équation $x^2 - 3x - 6 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes à savoir $x_1 = \frac{3 + \sqrt{33}}{2}$ et $x_2 = \frac{3 - \sqrt{33}}{2}$. x_1 est un réel positif et x_2 est un réel strictement négatif. Donc l'équation $x^2 - 3x - 6 = 0$ admet une et une seule solution positive à savoir le réel $\alpha = \frac{3 + \sqrt{33}}{2}$. La calculatrice fournit

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} = 4,37 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

3) Représentation graphique.



Il semble que la suite (u_n) soit croissante, convergente de limite α .

4) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

- $u_0 = 1$ et donc $u_0 \geq 0$. $u_1 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3} = 3,6\dots$ Donc $u_1 \geq u_0$. Enfin, $\alpha = 4,3\dots$ et donc $\alpha \geq u_1$. Ainsi, $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$. La propriété à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.

$$\begin{aligned}
0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha &\Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha) \text{ (par croissance de la fonction } f \text{ sur } [0, +\infty[) \\
&\Rightarrow 3 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha \\
&\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par le réel α . Donc la suite (u_n) est convergente.

5) a) $S_0 = u_0 = 1$, $S_1 = u_0 + u_1 = 1 + \frac{11}{3} = \frac{14}{3} = 4,66$ à 10^{-2} près.

$u_2 = 5 - \frac{4}{\frac{11}{3} + 2} = 5 - \frac{12}{17} = \frac{73}{17}$ puis $S_2 = \frac{14}{3} + \frac{73}{17} = \frac{457}{51} = 8,96$ à 10^{-2} près.

b) Algorithme complété.

Entrée	n un entier naturel
Variables	u et s sont des variables réelles n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1 s prend la valeur u i prend la valeur 0 Demander la valeur de n
Traitement	Tant que $i < n$ Affecter à i la valeur $i + 1$ Affecter à u la valeur $5 - \frac{4}{u + 2}$ Affecter à s la valeur $s + u$ Fin tant que
Sortie	Afficher s

c) La suite (u_n) est croissante. On en déduit que pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_0$ ou encore $u_n \geq 1$. Par suite, pour tout entier naturel n ,

$$S_n \geq \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ termes}} = n + 1.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$