Nouvelle Calédonie. Novembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Les parties A, B et C sont indépendantes

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Partie A

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de $2\,000$ pour la vente en gros.
On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à 0,003.

On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de $2\,000$ cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot.

On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

2) Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.
Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

Partie B

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient.

On suppose que Y suit une loi normale $\mathscr{N}(110;\sigma^2)$, d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type σ.
Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle $[104;116]$.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre σ telle que la probabilité de l'évènement « la glace est commercialisable » soit égale à $0,98$.

Partie C

Une étude réalisée en l'an 2000 a permis de montrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %.
En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d'entre elles déclarent consommer des glaces.

Peut-on affirmer, au niveau de confiance de 95 % et à partir de l'étude de cet échantillon, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010 ?

Nouvelle Calédonie. Novembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) X suit une loi binomiale. En effet,

- 2 000 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « le cône est défectueux » avec une probabilité $p = 0,003$ et « le cône n'est pas défectueux » avec une probabilité $1 - p = 0,997$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 2\,000$ et $p = 0,003$.

2) La probabilité demandée est $p\,(X \leqslant 11)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{p\,(X \leqslant 11) = 0,980 \text{ arrondi au millième.}}$$

Partie B

Soit $Z = \dfrac{Y - 110}{\sigma}$. On sait que Z suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

$$104 \leqslant Y \leqslant 116 \Leftrightarrow -6 \leqslant Y - 110 \leqslant 6 \Leftrightarrow -\frac{6}{\sigma} \leqslant \frac{Y - 110}{\sigma} \leqslant \frac{6}{\sigma} \Leftrightarrow -\frac{6}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{6}{\sigma},$$

et donc $p(104 \leqslant Y \leqslant 116) = p\left(-\dfrac{6}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{6}{\sigma}\right)$. L'énoncé donne $p\left(-\dfrac{6}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{6}{\sigma}\right) = 0,98$. Pour des raisons de symétrie, $p\left(Z \leqslant -\dfrac{6}{\sigma}\right) = \dfrac{1 - 0,98}{2} = 0,01$ et donc

$$p\left(Z \leqslant \frac{6}{\sigma}\right) = p\left(Z \leqslant -\frac{6}{\sigma}\right) + p\left(-\frac{6}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{6}{\sigma}\right) = 0,98 + 0,01 = 0,99.$$

La calculatrice fournit $\dfrac{6}{\sigma} = 2,32\ldots$ ou encore $\sigma = 2,57\ldots$ et donc

$$\boxed{\sigma = 2,6 \text{ à } 10^{-1} \text{ près par excès.}}$$

Partie C

Ici, $n = 900$ et $f = \dfrac{795}{900} = \dfrac{53}{60}$. On note que $n \geqslant 30$ puis $nf = 795$ et donc $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) = 105$ et donc $n(1-f) \geqslant 5$.

L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ ou encore $\left[\dfrac{53}{60} - \dfrac{1}{30}, \dfrac{53}{60} + \dfrac{1}{30}\right]$ ou encore $\left[\dfrac{51}{60}, \dfrac{55}{60}\right]$ ou enfin $[0,85; 0,91\ldots]$. La probabilité $p = 0,84$ n'appartient pas à l'intervalle de confiance et donc on ne peut pas affirmer, au niveau de confiance de 95 %, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010.

