Nouvelle Calédonie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x).$$

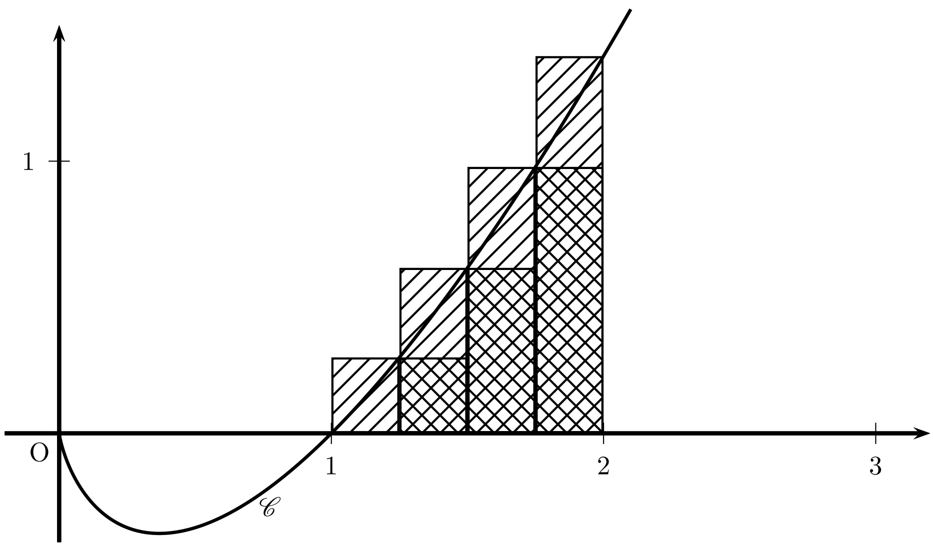
1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2) On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$. Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$.
3) Déterminer les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ (voir la figure ci-après).



Algorithme :

Variables
k et n sont des entiers naturels
U, V sont des nombres réels

Initialisation
U prend la valeur 0
V prend la valeur 0
n prend la valeur 4

Traitement
Pour k allant de 0 à $n - 1$
Affecter à U la valeur $U + \dfrac{1}{n}f\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)$
Affecter à V la valeur $V + \dfrac{1}{n}f\left(1 + \dfrac{k+1}{n}\right)$
Fin pour

Affichage
Afficher U
Afficher V

1) a) Que représentent U et V sur le graphique précédent ?

b) Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?

c) En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.

2) Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n}\left[f(1)+f\left(1+\frac{1}{n}\right)+f\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right] \\ V_n &= \frac{1}{n}\left[f\left(1+\frac{1}{n}\right)+f\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)+f(2)\right] \end{aligned}.$$

On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $U_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant V_n$.

a) Trouver le plus petit entier n tel que $V_n - U_n < 0,1$.

b) Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieure à $0,1$?

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}.$$

1) Montrer que F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2) Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

