

Nouvelle Calédonie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x).$$

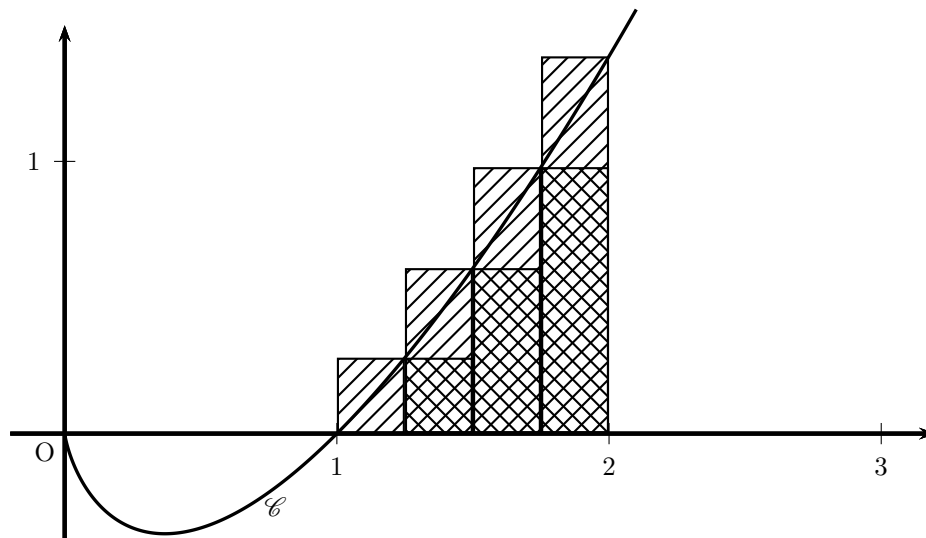
- 1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- 2) On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$. Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$.
- 3) Déterminer les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

Soit \mathcal{A} l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire \mathcal{A} (voir la figure ci-après).



Algorithme :

Variables

k et n sont des entiers naturels
 U, V sont des nombres réels

Initialisation

U prend la valeur 0
 V prend la valeur 0
 n prend la valeur 4

Traitement

Pour k allant de 0 à $n - 1$

Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

Affecter à V la valeur $V + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$

Fin pour

Affichage

Afficher U
Afficher V

1) a) Que représentent U et V sur le graphique précédent ?

b) Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?

c) En déduire un encadrement de \mathcal{A} .

2) Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

$$U_n = \frac{1}{n} \left[f(1) + f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \right]$$

$$V_n = \frac{1}{n} \left[f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) + f(2) \right]$$

On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $U_n \leq \mathcal{A} \leq V_n$.

a) Trouver le plus petit entier n tel que $V_n - U_n < 0,1$.

b) Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de \mathcal{A} d'amplitude inférieure à $0,1$?

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

1) Montrer que F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

2) Calculer la valeur exacte de \mathcal{A} .

Nouvelle Calédonie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) **Limite de f en 0.** En posant $x = \frac{1}{X}$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \ln(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(X)}{X} = 0$$

d'après un théorème de croissances comparées.

Limite de f en $+\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. De plus, pour $x > 0$,

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

$$\text{Pour tout réel } x > 0, f'(x) = \ln(x) + 1.$$

3) Soit x un réel strictement positif.

$\ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} .

De même, $\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$. Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $]e^{-1}, +\infty[$, strictement négative sur $]0, e^{-1}[$ et s'annule en e^{-1} . On en déduit le tableau de variations de la fonction f .

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f		↘	↗
		0	$+\infty$
		$-e^{-1}$	

Partie B

1) a) $U = \frac{1}{4}f(1) + \frac{1}{4}f\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(1 + \frac{2}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(1 + \frac{3}{4}\right)$ et $V = \frac{1}{4}f\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(1 + \frac{2}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(1 + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}f(2)$.

U est la somme des aires des rectangles au-dessous de la courbe et V est la somme des aires des rectangles au-dessus de la courbe.

b) • $U = \frac{1}{4}(1,25 \ln(1,25) + 1,5 \ln(1,5) + 1,75 \ln(1,75)) = 0,4666$ à 10^{-4} près par défaut.

• $V = \frac{1}{4}(1,25 \ln(1,25) + 1,5 \ln(1,5) + 1,75 \ln(1,75) + 2 \ln(2)) = 0,8132$ à 10^{-4} près par excès.

c) On en déduit que $0,4666 \leq \mathcal{A} \leq 0,8132$.

2) a) Soit n un entier naturel non nul.

$$V_n - U_n = \frac{f(2) - f(1)}{n} = \frac{2 \ln(2)}{n},$$

puis

$$V_n - U_n < 0,1 \Leftrightarrow \frac{2 \ln(2)}{n} < 0,1 \Leftrightarrow n > 20 \ln(2) \Leftrightarrow n > 13,8 \dots$$

$$\Leftrightarrow n \geq 14 \text{ (car } n \text{ est un entier naturel)}$$

b) **Algorithme modifié.**

Variables k et n sont des entiers naturels U, V sont des nombres réels**Initialisation** U prend la valeur 0 V prend la valeur 0 n prend la valeur 14**Traitement**Pour k allant de 0 à $n - 1$ Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{n}f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ Affecter à V la valeur $V + \frac{1}{n}f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$

Fin pour

AffichageAfficher $U \leq \mathcal{A} \leq V$ **Partie C**

1) La fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{1}{2} \left(2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} \right) - \frac{x}{2} = x \ln(x) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x \ln(x) = f(x).$$

Donc la fonction F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

2) La fonction f est continue et positive sur $[1, 2]$. Donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^2 f(x) dx = [F(x)]_1^2 = \left(\frac{2^2}{2} \ln(2) - \frac{2^2}{4} \right) - \left(\frac{1^2}{2} \ln(1) - \frac{1^2}{4} \right) \\ &= 2 \ln(2) - 1 + \frac{1}{4} = 2 \ln(2) - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = 2 \ln(2) - \frac{3}{4} = 0,6362 \dots$$