Nouvelle Calédonie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (6 points) (commun à tous les candidats)

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1 - \alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \int_{-x}^{x} f(t)\ dt.$$

1) Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?

2) Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) A l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel positif x, $H(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

4) En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0\ ;\ +\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de H sur $[0\ ;\ +\infty[$.

5) Démontrer alors le théorème énoncé.

Partie B

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.

60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.

Dans le stock total du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

- A l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;
- B l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;
- D l'événement : « La pipette a un défaut ».

1) La pipette choisie au hasard présente un défaut ; quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A ?

2) Montrer que $p(B \cap D) = 0,022\,4$.

3) Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, quel pourcentage de pipettes présente un défaut ?

Partie C

Une pipette est dite conforme si sa contenance est comprise, au sens large entre 98 millilitres (mL) et 102 mL.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque pipette prise au hasard dans le stock d'un laboratoire associe sa contenance (en millilitres).
On admet que X suit une loi normale de moyenne μ et écart type σ tels que $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1,042\,4$.

1) Quelle est alors la probabilité, à 10^{-4} près, pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme ? On pourra s'aider de la table ci-dessous ou utiliser une calculatrice.

Contenance x (en mL)	95	96	97	98	99
$P(X \leqslant x)$ (arrondi à 10^{-5})	$0,000\,00$	$0,000\,04$	$0,001\,65$	$0,025\,06$	$0,163\,68$

Contenance x (en mL)	100	101	102	103	104
$P(X \leqslant x)$ (arrondi à 10^{-5})	0,5	$0,836\,32$	$0,974\,94$	$0,998\,35$	$0,999\,96$

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0,05$.

2) On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100. On suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.

Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y_n ?

b) Vérifier que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

c) Donner en fonction de n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon.

Nouvelle Calédonie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

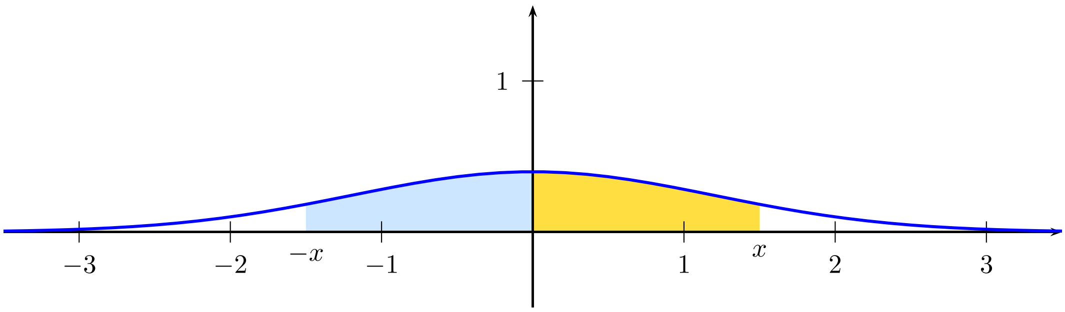
Partie A

Restitution organisée des connaissances

1) La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite.

2) $H(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x) = 1$.

3) Soit x un réel positif. Puisque la fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine jaune ci-dessous et $\displaystyle\int_{-x}^0 f(t)\,dt$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine bleu ci-dessous.



La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et donc ces deux aires sont égales. Comme $H(x)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la réunion des deux domaines, on en déduit que
$H(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

4) La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. On sait alors que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que sa dérivée est f. On en déduit que pour tout réel positif x, $H'(x) = 2f(x)$.

La fonction f est strictement positive sur $[0, +\infty[$ et donc la fonction H est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction H.

x	0		$+\infty$
$H'(x)$		$+$	
H	0	$\nearrow$	1

5) Soit α un réel élément de $]0, 1[$. Alors $1 - \alpha$ est un réel élément de $]0, 1[$.

La fonction H est continue continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $\left]\lim\limits_{x \to 0} H(x), \lim\limits_{x \to +\infty} H(x)\right[=]0, 1[$, l'équation $H(x) = k$ a une unique solution dans $]0, +\infty[$. Puisque le réel $1 - \alpha$ appartient à $]0, 1[$, on a montré qu'il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $H(\chi_\alpha) = 1 - \alpha$ ou encore tel que $P(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha) = 1 - \alpha$.

Partie B

1) L'énoncé fournit $p(A) = 0,6$, $p_A(D) = 0,046$ et $p(D) = 0,05$. La probabilité demandée est $p_D(A)$.

$$p_D(A) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{p(A) \times p_A(D)}{p(D)} = \frac{0,6 \times 0,046}{0,05} = 0,552.$$

$$\boxed{p_D(A) = 0,552.}$$

2) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(D) = p(A \cap D) + p(B \cap D)$$

et donc

$$p(B\cap D)=p(D)-p(A\cap D)=p(D)-p(A)\times p_A(D)=0,05-0,6\times 0,046=0,022\,4.$$

$$\boxed{p(B\cap D)=0,022\,4.}$$

3) La probabilité demandée est $p_B(D)$. Or

$$p_B(D)=\frac{p(B\cap D)}{p(B)}=\frac{p(B\cap D)}{1-p(A)}=\frac{0,022\,4}{0,4}=0,056$$

ou encore

$$\boxed{5,6\%\text{ des pipettes de l'entreprise }B\text{ présentent un défaut.}}$$

Partie C

1) La probabilité demandée est $P(98\leqslant X\leqslant 102)$. Or,

$$P(98\leqslant X\leqslant 102)=P(X\leqslant 102)-P(X\leqslant 98)=0,974\,94-0,025\,06=0,949\,88.$$

Donc

$$\boxed{\text{La probabilité pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme est }0,949\,8\text{ à }10^{-4}\text{ près.}}$$

2) a) Y_n suit une loi binomiale. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées (prélever une pipette n fois) ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « la pipette est non conforme » avec une probabilité $p=0,05$ et « la pipette est conforme » avec une probabilité $1-p=0,95$.

Donc, Y_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p=0,05$.

b) L'énoncé dit que $n\geqslant 100$ et en particulier $n\geqslant 30$. Ensuite, $np\geqslant 100\times 0,05=5$ et $n(1-p)\geqslant 100\times 0,95=95$ et donc $n(1-p)\geqslant 5$.

c) Les conditions b) étant vérifiées, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon est

$$\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}},p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,05-1,96\frac{\sqrt{0,05\times 0,95}}{\sqrt{n}},0,05+1,96\frac{\sqrt{0,05\times 0,95}}{\sqrt{n}}\right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle, on peut prendre comme intervalle

$$\left[0,05-\frac{0,428}{\sqrt{n}},0,05+\frac{0,428}{\sqrt{n}}\right].$$

