Liban 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.
Un *individu sain* est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.
Un *individu malade* est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.
Un *individu guéri* est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.
Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.
Les premières observations nous montrent que, d'un jour au jour suivant :

- 5 % des individus tombent malades ;
- 20 % des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience. On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est à dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1) Calculer a_1, b_1 et c_1.

2) a) Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ?
En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.

b) Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n. On admet que $c_{n+1} = 0,2b_n + c_n$.

Pour tout entier naturel n, on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

3) a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3}\left(0,95^n - 0,8^n\right) & 0,8^n & 0 \\ \dfrac{1}{3}\left(3 - 4 \times 0,95^n + 0,8^n\right) & 1 - 0,8^n & 1 \end{pmatrix}$.

4) a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $b_n = \dfrac{1}{3}\left(0,95^n - 0,8^n\right)$.

b) Déterminer la limite de la suite (b_n).

c) On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroît.
On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum. À cet effet, on utilise l'algorithme donné en **annexe 2 (à rendre avec la copie)**, dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).

Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en **annexe 2**.

Conclure.

ANNEXE 2

A rendre avec la copie

Algorithme et tableau à compléter

Variables :	b, b', x et y sont des réels k est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à b la valeur 0 Affecter à b' la valeur $0,05$ Affecter à k la valeur 0 Affecter à x la valeur $0,95$ Affecter à y la valeur $0,8$

Traitement :	Tant que $b < b'$, faire
	    Affecter à k la valeur $k+1$
	    Affecter à b la valeur b'
	    Affecter à x la valeur $0,95x$
	    Affecter à y la valeur $0,80y$
	    Affecter à b' la valeur ...
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher ...

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7 ème passage dans la boucle Tant que	7	$0,1628$	$0,6634$	$0,1678$	$0,1652$	Vrai
Après le 8 ème passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9 ème passage éventuel dans la boucle Tant que						

Liban 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 : corrigé

1) Le jour 1, 5 % des individus tombent malades, aucun ne peut encore guérir et donc 95 % des individus sont encore sains. Donc,

$$\boxed{a_1 = 0,95,\ b_1 = 0,05 \text{ et } c_1 = 0.}$$

2) a) 5 % des individus sains tombent malades le jour suivant et donc 95 % d'individus sains restent sains d'un jour au jour suivant.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,95a_n$.

b) Le $n+1$-ème jour, 5 % de la population saine s'est rajoutée à la population de malades et 20 % de la population de malades a guéri. Donc, pour tout entier naturel n,

$$b_{n+1} = b_n + 0,05a_n - 0,2b_n = 0,05a_n + 0,8b_n.$$

3) a) Soit n un entier naturel.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a_n \\ 0,05a_n + 0,8b_n \\ 0,2b_n + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = AU_n.$$

b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• Pour $n = 0$, $\begin{pmatrix} 0,95^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = D^0$. L'égalité est donc vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$D^{n+1} = D^n \times D = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = U_n = A^nU_0 = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3}\left(0,95^n - 0,8^n\right) & 0,8^n & 0 \\ \dfrac{1}{3}\left(3 - 4 \times 0,95^n + 0,8^n\right) & 1 - 0,8^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times \\ \dfrac{1}{3}\left(0,95^n - 0,8^n\right) \\ \times \end{pmatrix}.$$

On a montré que pour tout entier naturel n, $b_n = \dfrac{1}{3}\left(0,95^n - 0,8^n\right)$.

b) Puisque $-1 < 0,95 < 1$ et $-1 < 0,8 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \dfrac{1}{3}(0 - 0) = 0$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} b_n = 0.}$$

c) Algorithme modifié.

Variables :	b, b', x et y sont des entiers réels k est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à b la valeur 0 Affecter à b' la valeur $0,05$ Affecter à k la valeur 0 Affecter à x la valeur $0,95$ Affecter à y la valeur $0,8$
Traitement :	Tant que $b < b'$, faire Affecter à k la valeur $k+1$ Affecter à b la valeur b' Affecter à x la valeur $0,95x$ Affecter à y la valeur $0,80y$ Affecter à b' la valeur $(x-y)/3$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher k

Tableau complété.

	k	b	c	d	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7 ème passage dans la boucle Tant que	7	$0,1628$	$0,6634$	$0,1678$	$0,1652$	Vrai
Après le 8 ème passage éventuel dans la boucle Tant que	8	$0,1652$	$0,1342$	$0,6302$	$0,1653$	Vrai
Après le 9 ème passage éventuel dans la boucle Tant que	9	$0,1653$	$0,5987$	$0,1073$	$0,1637$	Faux

Le nombre de malades au 9-ème jour est donc strictement supérieur au nombre de malades au 8-ème jour. Le pic épidémique est atteint le 8-ème jour.

