Liban 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.
Les probabilités seront arrondies au dix millième.

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée.
Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.
Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans $99,4\,\%$ des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans $5\,\%$ des cas.

On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'événement « l'élève se rend au lycée à vélo », B l'événement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'événement « l'élève arrive en retard au lycée ».

1) Traduire la situation par un arbre de probabilités.

2) Déterminer la probabilité de l'événement $V \cap R$.

3) Démontrer que la probabilité de l'événement R est $0,0192$.

4) Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B : le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée.
Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.

1) Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.

2) Il part de son domicile à vélo à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?

3) L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de $0,9$? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C : le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ'.
On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de $0,05$.

On note Z' la variable aléatoire égale à $\dfrac{T' - 15}{\sigma'}$.

1) Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?

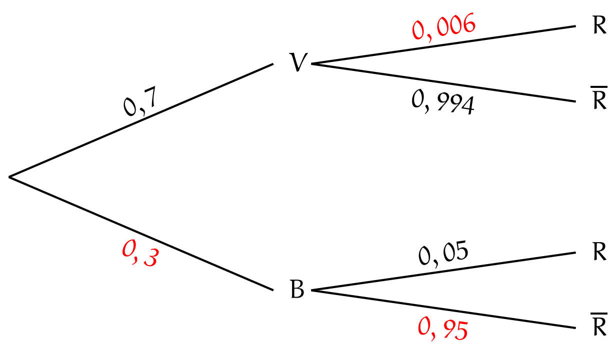
2) Déterminer une valeur approchée à $0,01$ près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T'.

Liban 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) $p(V \cap R) = p(V) \times p_V(R) = p(V) \times \left(1 - p_V\left(\overline{R}\right)\right) = 0,7 \times (1 - 0,994) = 0,0042$.

$$\boxed{p(V \cap R) = 0,0042.}$$

3) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(R) &= p(V \cap R) + p(B \cap R) = p(V) \times \left(1 - p_V\left(\overline{R}\right)\right) + (1 - p(V)) \times p_B(R) \\ &= 0,0042 + (1 - 0,7) \times 0,05 = 0,0042 + 0,015 = 0,0192. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(R) = 0,0192.}$$

4) La probabilité demandée est $p_R(B)$.

$$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{p(B) \times p_B(R)}{p(R)} = \frac{0,3 \times 0,05}{0,0192} = 0,78125.$$

$$\boxed{p_R(B) = 0,7812 \text{ arrondi au dix millième.}}$$

Partie B : le vélo

1) La probabilité demandée est $p(15 \leqslant T \leqslant 20)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{p(15 \leqslant T \leqslant 20) = 0,946 \text{ arrondi au dix millième.}}$$

2) La probabilité demandée est $p(T > 20)$ qui est aussi $p(T \geqslant 20)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{p(T > 20) = 0,0062 \text{ arrondi au dix millième.}}$$

3) On cherche d'abord le réel t tel que $p(T \leqslant t) = 0,9$. La calculatrice fournit $t = 18,5\ldots$ minutes. En arrondissant à la minute de manière à être sûr de ne pas être en retard, on obtient une durée de 19 min. L'élève doit donc partir à 8 h 00 moins 19 min ou encore l'élève doit partir à 7 h 41 au plus tard.

Partie C : le bus

1) On sait que la variable aléatoire Z' suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

2) Tout d'abord,

$$\begin{aligned}\mathsf{T}' \leqslant 20 \Leftrightarrow \mathsf{T}' - 15 \leqslant 5 \Leftrightarrow \frac{\mathsf{T}' - 15}{\sigma'} \leqslant \frac{5}{\sigma'}\\ \Leftrightarrow \mathsf{Z}' \leqslant \frac{5}{\sigma'},\end{aligned}$$

puis

$$p(\mathsf{T}' \geqslant 20) = 0,05 \Leftrightarrow p(\mathsf{T}' \leqslant 20) = 0,95 \Leftrightarrow p\left(\mathsf{Z}' \leqslant \frac{5}{\sigma'}\right) = 0,95.$$

Soit a est le réel tel que $p(\mathsf{Z}' \leqslant a) = 0,95$. Alors,

$$p\left(\mathsf{Z}' \leqslant \frac{5}{\sigma'}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \frac{5}{\sigma'} = a \Leftrightarrow \sigma' = \frac{5}{a}.$$

La calculatrice fournit

$$\boxed{\sigma' = 3,04 \text{ à } 0,01 \text{ près.}}$$

