France métropolitaine 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

- il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;
- la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A.
  Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années.
En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.

1) Justifier que $a_1 = 400$ et $b_1 = 300$ puis calculer a_2 et b_2.

2) On désigne par A et B les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.

b) Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

c) Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = AY_n$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = Y_{2n}$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = A^2 Z_n$.
En déduire que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = 2Z_n$.

b) On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n,

$$Y_{2n} = 2^n Z_0.$$

En déduire que $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n,

$$a_{2n} = 600 \times 2^n - 400 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.$$

4) Le bassin A a une capacité limitée à 10000 poissons.

a) On donne l'algorithme suivant.

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.

Traitement :	Si p est pair
	    Affecter à n la valeur $\dfrac{p}{2}$
	    Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	    Affecter à n la valeur $\dfrac{p-1}{2}$
	    Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.

Sortie :	Afficher a.

Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.

b) Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.

France métropolitaine 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 : corrigé

1) L'année 0, le bassin A contient 200 poissons et le bassin B contient 100 poissons ou encore $a_0 = 200$ et $b_0 = 100$.
L'année 1, le bassin B est vidé puis les 200 poissons du bassin A passent dans le bassin B et on rajoute 100 poissons dans le bassin B. Donc, $b_1 = 200 + 100 = 300$.
D'autre part, la vente des 100 poissons du bassin B permet l'achat de 200 poissons que l'on met dans le bassin A auxquels on ajoute encore 200 poissons. Donc $a_1 = 200 + 200 = 400$.

De même, $a_2 = 2b_1 + 200 = 800$ et $b_2 = a_1 + 100 = 500$.

$$\boxed{a_1 = 400,\ b_1 = 300,\ a_2 = 800 \text{ et } b_2 = 500.}$$

2)a) Soit n un entier naturel. Le nombre de poissons du bassin A l'année $n+1$ est le double du nombre de poissons du bassin B l'année n augmenté de 200. Donc, $a_{n+1} = 2b_n + 200$.
De même, le nombre de poissons du bassin B l'année $n+1$ est le nombre de poissons du bassin A l'année n augmenté de 100. Donc, $b_{n+1} = a_n + 100$. Par suite,

$$\begin{aligned}X_{n+1} &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n + 200 \\ a_n + 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \\ &= AX_n + B.\end{aligned}$$

b) Soient x et y deux réels.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y + 200 \\ y = x + 100 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y + 200 \\ y = (2y + 200) + 100 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -300 \\ x = -400 \end{array}\right. .\end{aligned}$$

c) Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $x = -400$ et $y = -300$. Soit n un entier naturel.

$$Y_{n+1} = X_{n+1} - X = (AX_n + B) - (AX + B) = A(X_n - X) = AY_n.$$

3) a) Soit n un entier naturel.

$$Z_{n+1} = Y_{2n+2} = AY_{2n+1} = A \times A \times Y_{2n} = A^2 Z_n.$$

Or, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ et donc

$$Z_{n+1} = A^2 Z_n = 2I_2 Z_n = 2Z_n.$$

b) Soit n un entier naturel. Puisque $Y_{2n} = 2^n Z_0$ avec $Z_0 = Y_0$,

$$Y_{2n+1} = AY_{2n} = A \times 2^n Z_0 = 2^n AY_0 = 2^n Y_1.$$

Ensuite,

$$\begin{pmatrix} a_{2n} + 400 \\ b_{2n} + 300 \end{pmatrix} = Y_{2n} = 2^n Y_0 = 2^n \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $a_{2n} + 400 = 600 \times 2^n$ puis $a_{2n} = 600 \times 2^n - 400$. On a aussi

$$\begin{pmatrix} a_{2n+1} + 400 \\ b_{2n+1} + 300 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} a_1 + 400 \\ b_1 + 400 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 800 \\ 700 \end{pmatrix}$$

et donc $a_{2n+1} + 400 = 800 \times 2^n$ puis $a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ a_{2n} = 600 \times 2^n - 400 \text{ et } a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.}$$

4) a) Si $p = 2n$, alors p est pair et $n = \dfrac{p}{2}$. Dans ce cas, l'algorithme affiche la valeur $600 \times 2^n - 400$ qui est $a_{2n} = a_p$.
Si $p = 2n+1$, alors p est impair et $n = \dfrac{p-1}{2}$. Dans ce cas, l'algorithme affiche la valeur $800 \times 2^n - 400$ qui est $a_{2n+1} = a_p$.

Dans tous les cas, l'algorithme affiche a_p une fois qu'on a rentré une valeur de p.

b) Algorithme modifié.

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Affecter à p la valeur 0. Affecter à a la valeur 200.

Traitement :	Tant que $a \leqslant 10000$ faire
	    Affecter à p la valeur $p+1$.
	    Si p est pair
	        Affecter à n la valeur $\dfrac{p}{2}$
	        Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	    Sinon
	        Affecter à n la valeur $\dfrac{p-1}{2}$
	        Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	    Fin de Si.
	Fin de Tant que

Sortie :	Afficher p.

