France métropolitaine 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (commun à tous les candidats)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,99$;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,001$.

1) Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à $0,1\,\%$. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

a) Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

b) Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

c) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2) Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à $0,95$. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.

À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Partie B

La chaine de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1) Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$, de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

a) Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2}.

b) Déterminer l'entier positif h tel que $P(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) \approx 0,99$ à 10^{-3} près.

2) La chaine de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins $97\,\%$ de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1000 tirages successifs avec remise.

Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.

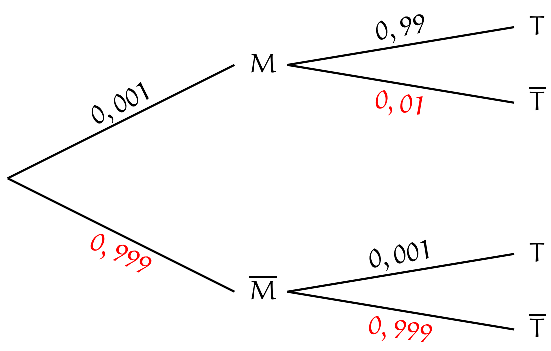
Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $95\,\%$.

France métropolitaine 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} p(T) &= p(M \cap T) + p\left(\overline{M} \cap T\right) = p(M) \times p_M(T) + p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,001 \times 0,99 + (1 - 0,001) \times 0,001 = 0,00099 + 0,000999 \\ &= 0,001989 = 1,989 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(T) = 1,989 \times 10^{-3}.}$$

c) L'affirmation de l'énoncé s'écrit encore $p_T(M) < 0,5$. Or

$$p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{p(M) \times p_M(T)}{p(T)} = \frac{0,001 \times 0,99}{0,001989} = 0,497\ldots.$$

Donc $p_T(M) < 0,5$ et l'affirmation de l'énoncé est vraie.

2) La proportion de personnes malades n'est plus $0,1$ % mais x. Puisque $p(M) = x$, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$p(T) = p(M) \times p_M(T) + p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(T) = 0,99x + 0,001(1 - x) = 0,989x + 0,001.$$

On en déduit que

$$p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{p(M) \times p_M(T)}{p(T)} = \frac{0,99x}{0,989x + 0,001}.$$

On veut que $p_T(M) \geqslant 0,95$.

$$\begin{aligned} p_T(M) \geqslant 0,95 &\Leftrightarrow \frac{0,99x}{0,989x + 0,001} \geqslant 0,95 \Leftrightarrow 0,99x \geqslant 0,95(0,989x + 0,001) \Leftrightarrow 0,99x \geqslant 0,93955x + 0,00095 \\ &\Leftrightarrow 0,05045x \geqslant 0,00095 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{0,00095}{0,05045} \\ &\Leftrightarrow x \geqslant 0,0188\ldots \end{aligned}$$

En arrondissant à 10^{-3}, le laboratoire commercialise le test quand la proportion de personnes malades dépasse $1,9$ %.

Partie B

1) a) La probabilité demandée est $p(890 \leqslant X \leqslant 920)$. La calculatrice fournit $p(890 \leqslant X \leqslant 920) = 0,92$ arrondi à 10^{-2}.

$$\boxed{\text{La probabilité qu'un comprimé soit conforme est } 0,92 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

b) Pour des raisons de symétrie, $p\,(X \leqslant 900 - h) = p\,(X \geqslant 900 + h)$. Donc,

$$p\,(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) = 1 - p(X \leqslant 900 - h) - p(X \geqslant 900 + h) = 1 - 2p\,(X \leqslant 900 - h)\,,$$

puis $p\,(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) = 0,99$ à 10^{-3} près équivaut à $1 - 2p\,(X \leqslant 900 - h) = 0,99$ à 10^{-3} près ce qui fournit encore $p(X \leqslant 900 - h) \approx 0,005$.

La calculatrice donne $900 - h = 881,969\ldots$ et donc $h = 18,03\ldots$ ou encore $h \approx 18$.

2) Ici, on suppose que $p = 0,97$. D'autre part, $n = 1000$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 970 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 30 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil $95\,\%$ est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,97 - 1,96\frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}, 0,97 + 1,96\frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}\right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,959, 0,981]$. La fréquence observée de comprimés conformes est

$$f = \frac{1000 - 53}{1000} = 0,947.$$

f n'appartient pas l'intervalle de fluctuation. Donc, le contrôle remet en question les réglages faits par le laboratoire au risque de se tromper de $5\,\%$.

