France métropolitaine 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + e^{-x}.$$

1) Justifier que $\mathscr{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0;1)$.

2) Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

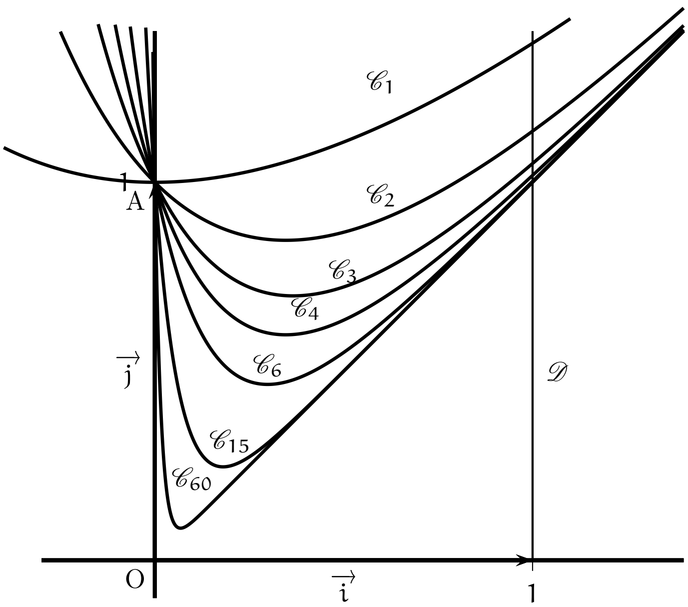
L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right)\, dx.$$

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + e^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = 1$.



a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

b) En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right) dx.$$

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3) Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).

France métropolitaine 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) $f_1(0) = 0 + e^0 = 1$ et donc $\mathscr{C}_1$ passe par le point $A(0, 1)$.

2) Dérivée de f_1. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_1'(x) = 1 + (-1) \times e^{-x} = 1 - e^{-x}.$$

Variations de f_1. Soit x un réel.

- Si $x < 0$, $-x > 0$ puis $e^{-x} > 1$ et donc $1 - e^{-x} < 0$.
- Si $x = 0$, $e^{-x} = 1$ et donc $1 - e^{-x} = 0$.
- Si $x > 0$, $-x < 0$ puis $e^{-x} < 1$ et donc $1 - e^{-x} > 0$.

En résumé, la fonction f_1' est strictement négative sur $]-\infty, 0[$, strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0. On en déduit que la fonction f_1 est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

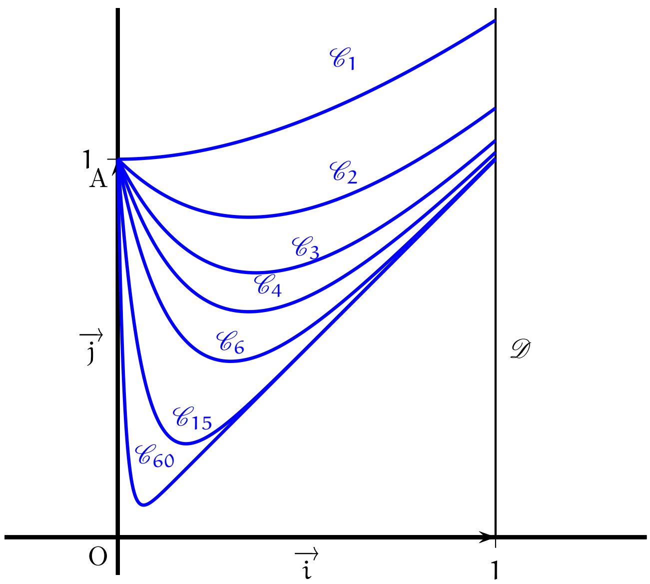
Limite de f_1 en $-\infty$. Pour tout réel x, $f_1(x) = e^{-x}(xe^x + 1)$.
D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x + 1) = 1$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$.

Limite de f_1 en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$.

On peut dresser le tableau de variation de la fonction f_1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B



1) a) Soit n un entier naturel. La fonction f_n est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc, I_n est l'aire, exprimée en unités d'aire du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_n$ d'une part, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.

b) Il semble que cette aire diminue quand n augmente et donc il semble que la suite (I_n) soit une suite décroissante. D'autre part, il semble que l'aire I_n tende vers l'aire du triangle de sommets de coordonnées respectives $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$ ou encore il semble que I_n tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1,

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \left(x + e^{-(n+1)x}\right) dx - \int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\left(x + e^{-(n+1)x}\right) - \left(x + e^{-nx}\right)\right) dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^1 \left(e^{-(n+1)x} - e^{-nx}\right) dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - \frac{e^{-nx}}{e^{-(n+1)x}}\right) dx \\
&= \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^{-nx+(n+1)x}\right) dx \\
&= \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right)\, dx.
\end{aligned}$$

Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $e^x \geqslant 1$ et donc $1 - e^x \leqslant 0$. D'autre part, pour tout réel x de $[0,1]$, $e^{-(n+1)x} \geqslant 0$. On en déduit que pour tout réel x de $[0,1]$, $e^{-(n+1)x}(1 - e^x) \leqslant 0$.

Par positivité de l'intégrale, on obtient $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ et donc $I_{n+1} \leqslant I_n$.

Ainsi, la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 (car chaque I_n est une aire). On en déduit que la suite (I_n) est convergente.

3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-n}}{-n}\right) - \left(\frac{0}{2} + \frac{e^0}{-n}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{ne^n} + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^n = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{ne^n} = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}.}$$

