Centres étrangers 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (7 points) (commun à tous les candidats)

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.
Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1) On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné en **annexe**, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.
Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2) On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (e - 1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.
On définit sur l'intervalle $[0; 1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

a) Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$: $g'(x) = \dfrac{(e-2) - (e-1)x}{1 + (e-1)x}$;

b) Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; 1]$.
Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0,12$.

c) Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0; 1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.
On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à $0,05$.

1) Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.
Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables	x (nuance initiale) y (nuance retouchée) E (écart) k
Initialisation	c prend la valeur 0

Traitement	Pour k allant de 0 à 100, faire
	    x prend la valeur $\dfrac{k}{100}$
	    y prend la valeur $f(x)$
	    E prend la valeur $\|y - x\|$
	    Si $E \geqslant 0,05$, faire
	        c prend la valeur $c+1$
	    Fin si
	Fin pour

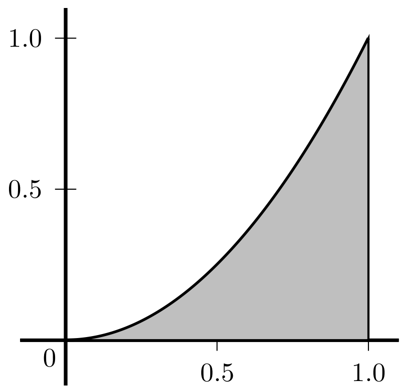
Sortie :	Afficher c

2) Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-a-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathcal{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.



Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image est celle correspondant à la plus petite aire.
On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

$$f_1(x) = xe^{\left(x^2-1\right)} \qquad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

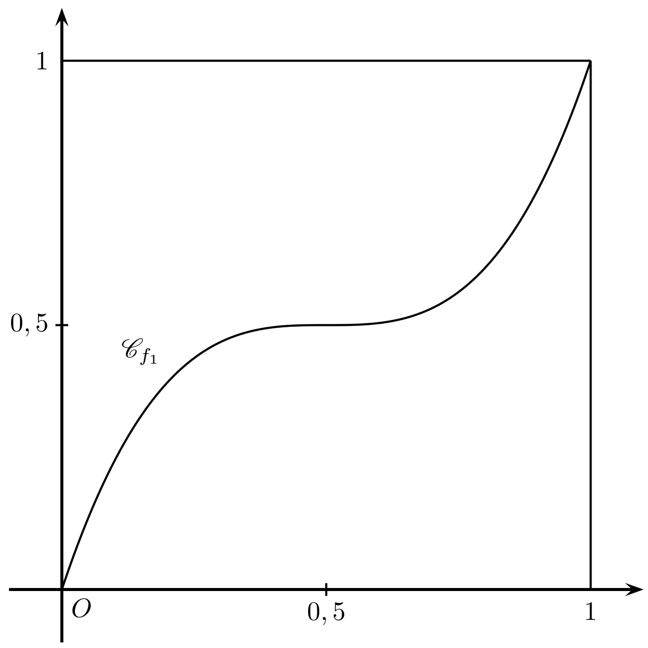
1) a) Calculer $\mathscr{A}_{f_1}$.

b) Calculer $\mathscr{A}_{f_2}$

2) De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

FEUILLES ANNEXES

Annexe 2, exercice 3



Centres étrangers 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

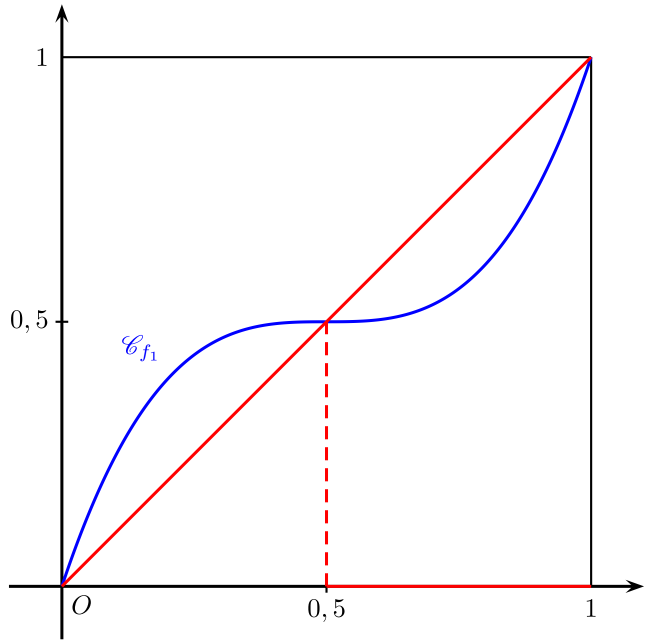
1) a) • $f_1(0) = 0$ et $f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$.
• La fonction f_1 est continue sur $[0, 1]$ en tant que fonction polynôme.
• La fonction f_1 est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$,

$$f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1) = 3(2x - 1)^2.$$

La fonction f_1' est positive sur $[0, 1]$ et donc la fonction f_1 est croissante sur $[0, 1]$.

On a montré que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b) Résolution graphique de l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$.



En notant que $f_1(0,5) = 0,5$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$ est $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ceci signifie que les gris clairs (codés par un réel x inférieur à $0,5$) sont assombris et les gris foncés (codés par un réel x supérieur à $0,5$) sont éclaircis.

2) a) Pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$, $1 + (e - 1)x \geqslant 1$ et en particulier, $1 + (e - 1)x > 0$. On en déduit que la fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$,

$$g'(x) = \frac{e - 1}{1 + (e - 1)x} - 1 = \frac{(e - 1) - (1 + (e - 1)x)}{1 + (e - 1)x} = \frac{(e - 2) - (e - 1)x}{1 + (e - 1)x}.$$

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 1],\ g'(x) = \frac{(e - 2) - (e - 1)x}{1 + (e - 1)x}.}$$

b) Pour tout réel de $[0, 1]$, $1 + (e - 1)x > 0$. Donc, pour tout réel x de $[0, 1]$, $g'(x)$ est du signe de $(e - 2) - (e - 1)x$. Or,

$$\begin{aligned}(e - 2) - (e - 1)x > 0 &\Leftrightarrow (e - 2) > (e - 1)x \\ &\Leftrightarrow \frac{e - 2}{e - 1} > x \text{ (car } e - 1 > 0) \\ &\Leftrightarrow x < \frac{e - 2}{e - 1}.\end{aligned}$$

De même, $(e - 2) - (e - 1)x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{e - 2}{e - 1}$ avec $\frac{e - 2}{e - 1} = 0,418\ldots$ On note que $\frac{e - 2}{e - 1} \in [0, 1]$. De plus,

$$g\left(\frac{e-2}{e-1}\right) = \ln\left(1+(e-1)\frac{e-2}{e-1}\right) - \frac{e-2}{e-1} = \ln(e-1) - \frac{e-2}{e-1}$$
$$= 0,12 \text{ (arrondie au centième).}$$

On peut dresser le tableau de variations de la fonction g.

x	0		$\frac{e-2}{e-1}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0,12\ldots$	$\searrow$	0

On a montré en particulier que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0,12$.

c) La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{e-2}{e-1}\right]$. Donc, pour tout réel k de $\left[g(0), g\left(\dfrac{e-2}{e-1}\right)\right] = [0; 0,12\ldots]$, l'équation $g(x) = k$ admet une unique solution dans $\left[0, \dfrac{e-2}{e-1}\right]$. En particulier, puisque $0,05 \in [0; 0,12\ldots]$, l'équation $g(x) = 0,05$ admet une unique solution notée α dans $\left[0, \dfrac{e-2}{e-1}\right]$ et même dans $\left]0, \dfrac{e-2}{e-1}\right[$.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{e-2}{e-1}, 1\right]$. Donc, pour tout réel k de $\left[g(1), g\left(\dfrac{e-2}{e-1}\right)\right] = [0; 0,12\ldots]$, l'équation $g(x) = k$ admet une unique solution dans $\left[\dfrac{e-2}{e-1}, 1\right]$. En particulier, puisque $0,05 \in [0; 0,12\ldots]$, l'équation $g(x) = 0,05$ admet une unique solution notée β dans $\left[\dfrac{e-2}{e-1}, 1\right]$ et même dans $\left]\dfrac{e-2}{e-1}, 1\right[$.

Partie B

1) L'algorithme analyse les 101 nuances de gris codées 0, $0,01$, $0,02$, $\ldots$, $0,99$ et 1. Le compteur c dénombre les nuances de gris où la modification sera effectivement perceptible. C'est ce qu'affiche l'algorithme.

2) On rappelle que $0,08 < \alpha < 0,09$ et que $0,85 < \beta < 0,86$. Le tableau de variations de la fonction g établi à la question 2)b) de la partie A montre que la modification est perceptible quand $x \in [\alpha, \beta]$. Donc, l'algorithme compte les valeurs $0,09$, $0,10$, $0,11$, $\ldots$, $0,84$, $0,85$.

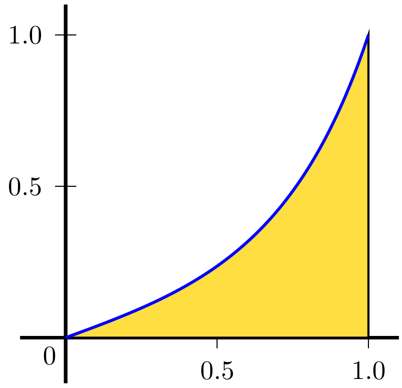
Il revient au même de compter le nombre d'entiers compris au sens large entre 9 et 85. Il y a 85 entiers compris au sens large entre 1 et 85 et 8 entiers compris au sens large entre 1 et 8. Il y a donc $85 - 8 = 77$ entiers compris au sens large entre 9 et 85.

Si on l'applique à la fonction f_2, l'algorithme affichera 77.

Partie C

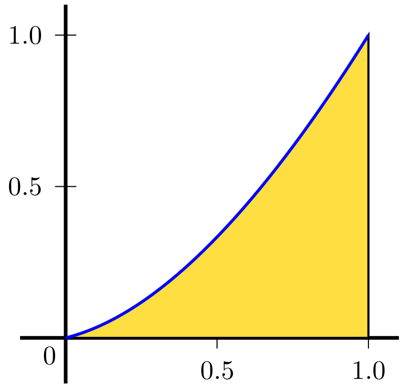
1) a) La fonction f_1 est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc

$$\mathscr{A}_{f_1} = \int_0^1 xe^{x^2-1}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{2}e^{-1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0,32 \text{ (arrondi à } 10^{-2}\text{).}$$



b) La fonction f_2 est continue et positive sur $[0,1]$. Donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{f_2} &= \int_0^1 \left(4x - 15 + \frac{60}{x+4}\right) dx = \left[2x^2 - 15x + 60\ln(x+4)\right]_0^1 = -13 + 60\ln(5) - 60\ln(4) \\ &= -13 + 60\ln\left(\frac{5}{4}\right) = -13 + 60\ln(1,25) = 0,39 \text{ (arrondi à } 10^{-2}).\end{aligned}$$



2) Donc, la fonction f_1 est celle qui éclaircit le plus l'image.

