Centres étrangers 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (4 points) (commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1

Dans un hypermarché, $75\,\%$ des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.

Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millième :

a) 0,750 **b)** 0,150 **c)** 0,462 **d)** 0,700

Question 2

Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à $0,3$. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle.

La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième :

a) 0,900 **b)** 0,092 **c)** 0,002 **d)** 0,267

Question 3

Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \dfrac{1}{8}$.

La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

a) 0,750 **b)** 0,250 **c)** 0,472 **d)** 0,528

Question 4

Cet hypermarché vend des baguettes de pain dont la masse, exprimée en gramme, est une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale de moyenne 200 g.

La probabilité que la masse d'une baguette soit comprise entre 184 g et 216 g est égale à $0,954$.

La probabilité qu'une baguette prise au hasard ait une masse inférieure à 192 g a pour valeur arrondie au centième :

a) 0,16 **b)** 0,32 **c)** 0,84 **d)** 0,48

Centres étrangers 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) réponse c)

2) réponse d)

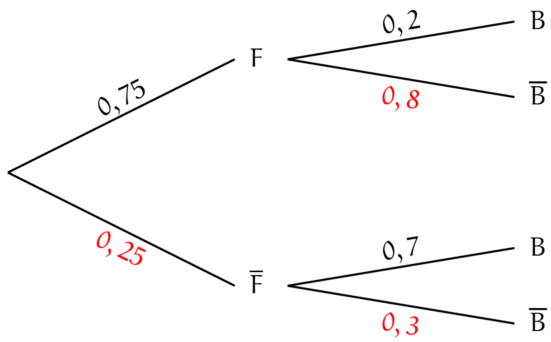
3) réponse c)

4) réponse a)

Explication 1

Notons F l'événement : « le client est une femme » et B l'événement « le client achète un article au rayon bricolage ».

L'énoncé donne $p(F) = 0,75$, $p_F(B) = 0,2$ et $p_{\overline{F}}(B) = 0,7$. On veut calculer $p_B(F)$. Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}p(B) &= p(F \cap B) + p\left(\overline{F} \cap B\right) = p(F) \times p_F(B) + p\left(\overline{F}\right) \times p_{\overline{F}}(B) \\ &= 0,75 \times 0,2 + (1 - 0,75) \times 0,7 = 0,325.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$p_B(F) = \frac{p(F \cap B)}{p(B)} = \frac{p(F) \times p_F(B)}{p(B)} = \frac{0,75 \times 0,2}{0,325} = 0,462 \text{ arrondie au millième.}$$

La bonne réponse est la réponse c.

Explication 2

Notons X le nombre de personnes ayant acheté le modèle d'odinateur. X suit une loi binomiale. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « le client achète le modèle d'ordinateur » avec une probabilité $p = 0,3$ et « le client n'achète pas le modèle d'ordinateur » avec une probabilité $1 - p = 0,7$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.

La probabilité demandée est $p(X = 3)$. La calculatrice fournit

$$p(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^7 = 0,267 \text{ arrondie au millième.}$$

La bonne réponse est la réponse d.

Explication 3

Notons X la variable aléatoire considérée. Pour tout réel t, on a

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t},$$

et donc aussi

$$p(X \geqslant t) = 1 - p(X \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{t}{8}}.$$

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 6)$.

$$p(X \geqslant 6) = e^{-\frac{6}{8}} = e^{-0,75} = 0,472 \text{ arrondie au millième.}$$

La bonne réponse est la réponse c.

Explication 4

Notons X la variable aléatoire considérée. X suit la loi normale de paramètres $\mu = 200$ et d'écart-type noté σ. Posons $Z = \dfrac{X - 200}{\sigma}$. On sait que la variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite.
L'énoncé donne $p(184 \leqslant X \leqslant 216) = 0,954$. Or,

$$184 \leqslant X \leqslant 216 \Leftrightarrow -16 \leqslant X - 200 \leqslant 16 \Leftrightarrow -\frac{16}{\sigma} \leqslant \frac{X - 200}{\sigma} \leqslant \frac{16}{\sigma} \Leftrightarrow -\frac{16}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{16}{\sigma}.$$

L'égalité $p\left(-\dfrac{16}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{16}{\sigma}\right) = 0,954$ fournit encore $p\left(Z \leqslant \dfrac{16}{\sigma}\right) = 0,954 + \dfrac{1 - 0,954}{2} = 0,977$. La calculatrice fournit alors $\dfrac{16}{\sigma} = 2$ arrondi à 10^{-2} puis $\sigma \approx 8$.

L'énoncé demande alors $p(X \leqslant 192)$. La calculatrice fournit $p(X \leqslant 192) = 0,16$ arrondie au centième. La bonne réponse est la réponse a.

