Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique.
Mathématiques.

Partie I.

1) $0 = (0)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans F. Soient $\left((z_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (z'_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\lambda z_n + \mu z'_n \underset{n\to\pm\infty}{=} \lambda\, o\left(|n|^{-p}\right) + \mu\, o\left(|n|^{-p}\right) \underset{n\to\pm\infty}{=} o\left(|n|^{-p}\right).$$

Donc, $\lambda (z_n)_{n\in\mathbb{Z}} + \mu (z'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in F$. On a montré que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soient $z \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z^{|n|}}{|n|!}\right| |n|^p = \frac{|z|^{|n|}|n|^p}{|n|!} &= \frac{(|z|+1)^{|n|}\left(\dfrac{|z|}{|z|+1}\right)^{|n|}|n|^p}{|n|!} \\
&\underset{n\to\pm\infty}{=} o\left(\frac{(|z|+1)^{|n|}}{|n|!}\right) \text{ (d'après un théorème de croissances comparées car } \frac{|z|}{|z|+1} < 1\text{)} \\
&\underset{n\to\pm\infty}{=} o(1) \text{ (d'après un théorème de croissances comparées),}
\end{aligned}$$

et donc $\dfrac{z^{|n|}}{|n|!} \underset{n\to\pm\infty}{=} o\left(|n|^{-p}\right)$. Par suite, $\left(\dfrac{z^{|n|}}{|n|!}\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in F$.

3) a) Si $\deg(P) = 0$, $n_0 = 0$ convient. Sinon, posons $\deg(P) = k \in \mathbb{N}^*$. P a un nombre fini de racines (à savoir k) dans $\mathbb{C}$. Soit M le maximum du module des racines de P dans $\mathbb{C}$ puis $n_0 = E(M)+1$ (où E désigne la partie entière). Pour $n \geqslant n_0$, $|n| > M$ et donc $P(n) \neq 0$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après ce qui précède, $\left(P(n)|z|^{|n|}n^p\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ ne s'annule pas pour n suffisamment grand en valeur absolue. En notant k degré de P, pour $p \in \mathbb{N}$, $\left|P(n)z^{|n|}|n|^p\right| \underset{n\to\pm\infty}{\sim} |\text{dom}(P)||n|^{k+p}|z|^n$. Par suite, si $|z| < 1$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P(n)z^{|n|}|n|^p \underset{n\to\pm\infty}{\to} 0$ et si $|z| \geqslant 1$, $P(n)z^{|n|}|n|^0 \underset{n\to\pm\infty}{\not\to} 0$. Donc, $\left(P(n)z^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in F \Leftrightarrow |z| < 1$.

4) a) Soit $f \in C^1_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. f' est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, en dérivant l'égalité $f(x+T) = f(x)$, valable pour tout réel x, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x+T) = f'(x)$. Ainsi, $f' \in C^0_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Les deux fonctions fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto -in\omega e^{-in\omega t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, T]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
c_n(f') = \frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{-in\omega t}\,dt &= \frac{1}{T}\left(\left[f(t)e^{-in\omega t}\right]_0^T - \int_0^T f(t)\left(-in\omega e^{-in\omega t}\right)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(f(T)e^{-2in\pi} - f(0) + in\omega\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt\right) \text{ (car } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ et donc } \omega T = 2\pi\text{)} \\
&= in\omega \times \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt \text{ (car } f \text{ est } T\text{-périodique)} \\
&= in\omega c_n(f).
\end{aligned}$$

b) Soit $f \in C^\infty_T(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n\left(f^{(k)}\right) = (in\omega)^k c_n(f).$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned}
|n^p c_n(f)| &= \left|n^p \frac{c_n\left(f^{(p+1)}\right)}{(in\omega)^{p+1}}\right| = \frac{1}{|n|\omega^{p+1}}\left|c_n\left(f^{(p+1)}\right)\right| \\
&= \frac{1}{T|n|\omega^{p+1}}\left|\int_0^T f^{(p+1)}(t)\,e^{-in\omega t}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{T|n|\omega^{p+1}}\int_0^T \left|f^{(p+1)}(t)\right|\,dt.
\end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

On en déduit que $|n|^p c_n(f) \underset{n\to\pm\infty}{\rightarrow} 0$ et donc que $c_n(f) \underset{n\to\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{|n|^p}\right)$.

Partie II.

5) a) Par hypothèse, il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|^\alpha$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$,

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leqslant c\,|x - x_0|^{\alpha-1}.$$

Puisque $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} c\,|x - x_0|^{\alpha-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$. Ceci montre que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = 0$.

Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 0$.

b) D'après la question précédente, un élément de $H^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est nécessairement une fonction constante. Réciproquement, les fonctions constantes sont dans $H^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. $H^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est donc l'ensemble des fonctions constantes.

Toute fonction constante est T-périodique et donc $H^\alpha_T(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est aussi l'ensemble des fonctions constantes.

6) Si $f \in H^\alpha_T(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, il existe $c \geqslant 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|^\alpha$. Mais alors, puisque $\alpha > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y\neq x}} f(y) = f(x)$ et donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et de plus T-péridoique. Ainsi, $H^\alpha_T(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \subset C^0_T(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

La fonction nulle est dans $H^\alpha_T(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Soient $(f, g) \in \left(H^\alpha_T(\mathbb{R}, \mathbb{K})\right)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe deux réels positifs c_f et c_g tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant c_f|x - y|\alpha$ et $|g(x) - g(y)| \leqslant c_g|x - y|^\alpha$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors

$$\begin{aligned}|(\lambda f(x) + \mu g(x)) - (\lambda f(y) + \mu g(y))| &\leqslant |\lambda||f(x) - f(y)| + |\mu||g(x) - g(y)|\\ &\leqslant (|\lambda|c_f + |\mu|c_g)\,|x - y|^\alpha,\end{aligned}$$

et donc $\lambda f + \mu g \in H^\alpha_T(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Par suite, $H^\alpha_T(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0_T(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Soient $(f, g) \in \left(H^\alpha_T(\mathbb{R}, \mathbb{K})\right)^2$ puis c_f et c_g définis comme ci-dessus. f et g sont continues sur le segment $[0, T]$ et donc bornées sur ce segment puis bornées sur $\mathbb{R}$ par T-périodicité.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)|\\ &\leqslant |g(y)||f(x) - f(y)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \leqslant \|g\|_\infty|f(x) - f(y)| + \|f\|_\infty|g(x) - g(y)|\\ &\leqslant (\|f\|_\infty c_g + \|g\|_\infty c_f)\,|x - y|^\alpha\end{aligned}$$

et donc $fg \in H^\alpha_T(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Ceci montre que $H^\alpha_T(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est stable pour $\times$.

7) a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $|y - x| \leqslant T$, $\widetilde{x} = x$ convient

Supposons maintenant que $|y - x| > T$. Soit $k_0 = E\left(\dfrac{y - x}{T}\right)$ puis $\widetilde{x} = x + k_0T$ (où E désigne la partie entière). Alors, k_0 est un entier relatif et

$$\begin{aligned}k_0 = E\left(\frac{y - x}{T}\right) &\Leftrightarrow k_0 \leqslant \frac{y - x}{T} < k_0 + 1 \Leftrightarrow k_0T \leqslant y - x < (k_0 + 1)\,T \Leftrightarrow 0 \leqslant y - (x + k_0T) < T \Leftrightarrow 0 \leqslant y - \widetilde{x} < T\\ &\Rightarrow |y - \widetilde{x}| \leqslant T \leqslant |y - x|.\end{aligned}$$

Dans tous les cas, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que le réel $\widetilde{x} = x + kT$ vérifie $|y - \widetilde{x}| \leqslant T$ et $|y - \widetilde{x}| \leqslant |y - x|$.

b) Soient α et β deux réels tels que $0 < \beta \leqslant \alpha$. Soit $f \in H^\alpha_T(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Il existe $c \geqslant 0$ tel que $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|^\alpha$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soient k_0 et $\widetilde{x}$ définis comme à la question précédente.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= |f(x+k_0T)-f(y)| \text{ (car f est T-périodique)}\\
&= |f(\widetilde{x})-f(y)|\\
&\leqslant c\,|\widetilde{x}-y|^{\alpha} = cT^{\alpha}\left(\frac{|\widetilde{x}-y|}{T}\right)^{\alpha}\\
&\leqslant cT^{\alpha}\left(\frac{|\widetilde{x}-y|}{T}\right)^{\beta} \text{ (car } 0\leqslant \frac{|\widetilde{x}-y|}{T}\leqslant 1 \text{ et donc la fonction } u\mapsto \left(\frac{|\widetilde{x}-y|}{T}\right)^{u} \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[)\\
&= cT^{\alpha-\beta}\,|\widetilde{x}-y|^{\beta}\\
&\leqslant cT^{\alpha-\beta}\,|x-y|^{\beta} \text{ (car } |\widetilde{x}-y|\leqslant|x-y| \text{ et par croissance de la fonction } u\mapsto u^{\beta} \text{ sur } \mathbb{R}^+).
\end{aligned}
$$

Le réel $c' = cT^{\alpha-\beta}$ est un réel positif tel que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|f(x)-f(y)|\leqslant c'|x-y|^{\beta}$ et donc $f\in H_T^{\beta}(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

On a montré que $H_T^{\alpha}(\mathbb{R},\mathbb{K})\subset H_T^{\beta}(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

Partie III.

8) Soit t un réel et k un entier relatif.

$$-\frac{T}{2}\leqslant t-kT<\frac{T}{2}\Leftrightarrow kT\leqslant t+\frac{T}{2}<(k+1)T\Leftrightarrow k\leqslant\frac{t}{T}+\frac{1}{2}<k+1\Leftrightarrow k=E\left(\frac{t}{T}+\frac{1}{2}\right).$$

Posons alors pour tout réel t, $f_{\alpha}(t)=|t-k_tT|^{\alpha}$ où $k_t=E\left(\frac{t}{T}+\frac{1}{2}\right)$.

• Soit $t\in\mathbb{R}$. $k_{t+T}=E\left(\frac{t+T}{T}+\frac{1}{2}\right)=E\left(\frac{t}{T}+\frac{1}{2}+1\right)=E\left(\frac{t}{T}+\frac{1}{2}\right)+1=k_t+1$ et donc

$$f_{\alpha}(t+T)=|(t+T)-k_{t+T}T|^{\alpha}=|(t+T)-(k_t+1)\,T|^{\alpha}=|t-k_tT|^{\alpha}=f_{\alpha}(t).$$

Donc, f_{α} est T-périodique.

• Pour $t\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right[$, $k_t=0$ puis $f(t)=|t|^{\alpha}$. Par T-périodicité, on a encore

$$f_{\alpha}\left(\frac{T}{2}\right)=f\left(\frac{T}{2}-T\right)=f\left(-\frac{T}{2}\right)=\left|-\frac{T}{2}\right|^{\alpha}=\left|\frac{T}{2}\right|^{\alpha},$$

et donc $\forall t\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$, $f_{\alpha}(t)=|t|^{\alpha}$. En particulier, $\forall t\in\left]0,\frac{T}{2}\right]$, $f_{\alpha}(t)=t^{\alpha}$.

• Pour $t\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$, $f_{\alpha}(-t)=f_{\alpha}(t)$. Soit alors $t\in\mathbb{R}$. S'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $t=-\frac{T}{2}+kT$, alors

$$f_{\alpha}(-t)=f_{\alpha}\left(\frac{T}{2}-kT\right)=f_{\alpha}\left(\frac{T}{2}\right)=f_{\alpha}\left(-\frac{T}{2}\right)=f_{\alpha}\left(-\frac{T}{2}+kT\right)=f_{\alpha}(t).$$

Sinon, $-\frac{T}{2}<t-k_tT<\frac{T}{2}$ et donc aussi $-\frac{T}{2}<k_tT-t<\frac{T}{2}$ puis

$$f_{\alpha}(-t)=f_{\alpha}(-t+k_tT)=f_{\alpha}(t-k_tT)=f_{\alpha}(t).$$

Finalement, $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_{\alpha}(-t)=f_{\alpha}(t)$ puis f_{α} est paire.

• f_{α} est continue sur $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right[$ et plus généralement sur tout intervalle de la forme $\left[-\frac{T}{2}+kT,\frac{T}{2}+kT\right[$, $k\in\mathbb{Z}$, par T-périodicité. De plus, si $k\in\mathbb{Z}$,

$$\lim_{\substack{t\to\frac{T}{2}+kT\\ t<\frac{T}{2}+kT}}f_{\alpha}(t)=\lim_{\substack{t\to\frac{T}{2}\\ t<\frac{T}{2}}}f_{\alpha}(t)=\left(\frac{T}{2}\right)^{\alpha}=f\left(\frac{T}{2}\right)=f\left(-\frac{T}{2}+kT\right).$$

Ainsi, f_{α} est continue à gauche en chaque $-\frac{T}{2}+kT$, $k\in\mathbb{Z}$, et finalement f_{α} est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f_{α} convient où f_{α} est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_{\alpha}(t)=|t-k_tT|^{\alpha}$ avec $k_t=E\left(\frac{t}{T}+\frac{1}{2}\right)$.

9) a) Pour $t\geqslant 1$, posons $g(t)=(t-1)^{\alpha}-t^{\alpha}-1$. φ est continue sur $[1,+\infty[$, dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour $t>1$,

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

$$g'(t) = \alpha\left((t-1)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}\right).$$

Soit $t > 1$. Puisque $\alpha - 1 < 0$ et que $0 < t-1 < t$, on en déduit que $(t-1)^{\alpha-1} > t^{\alpha-1}$ puis que $g'(t) > 0$. La fonction g' est positive sur $]1, +\infty[$ et donc, la fonction g est croissante sur $[1, +\infty[$ (car de plus continue sur $[1, +\infty[$). Par suite, Pour $t > 1$, $g(t) > g(1) = 0$.

On a montré que pour tout $t \geqslant 1$, $t^\alpha - 1 \leqslant (t-1)^\alpha$.

b) Soit $(t, t') \in \left[0, \frac{T}{2}\right]^2$ tel que $0 \leqslant t < t' \leqslant \frac{T}{2}$.

Si $t > 0$, on a $\frac{t'}{t} > 1$ puis $|f_\alpha(t) - f_\alpha(t')| = t'^\alpha - t^\alpha = t^\alpha\left(\left(\frac{t'}{t}\right)^\alpha - 1\right) \leqslant t^\alpha\left(\frac{t'}{t} - 1\right)^\alpha = (t'-t)^\alpha = |t'-t|^\alpha$.

Si $t = 0$, $|f_\alpha(t) - f_\alpha(t')| = t'^\alpha \leqslant (t'-0)^\alpha$.

Ainsi, pour $(t, t') \in \left[0, \frac{T}{2}\right]^2$ tel que $0 \leqslant t < t' \leqslant \frac{T}{2}$, $|f_\alpha(t) - f_\alpha(t')| \leqslant |t'-t|^\alpha$. Ceci reste vrai si $0 \leqslant t' < t \leqslant \frac{T}{2}$ ou si $0 \leqslant t = t' \leqslant \frac{T}{2}$. Finalement,

$$\forall (t, t') \in \left[0, \frac{T}{2}\right]^2,\ |f_\alpha(t) - f_\alpha(t')| \leqslant |t'-t|^\alpha.$$

Ceci reste vrai par parité pour $(t, t') \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right]^2$ puis pour $(t, t') \in \left[\frac{T}{2}, T\right]^2$ par T-périodicité.

Soit alors $(t, t') \in [0, T]^2$ tel que $0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{2} \leqslant t' \leqslant T$.

$$\begin{aligned}|f_\alpha(t) - f_\alpha(t')| &\leqslant \left|f_\alpha(t) - f_\alpha\left(\frac{T}{2}\right)\right| + \left|f_\alpha\left(\frac{T}{2}\right) - f_\alpha(t')\right| \leqslant \left|t - \frac{T}{2}\right|^\alpha + \left|\frac{T}{2} - t'\right|^\alpha \\ &\leqslant |t-t'|^\alpha + |t-t'|^\alpha = 2|t-t'|^\alpha.\end{aligned}$$

En résumé, pour $(t, t') \in [0, T]^2$,

- si $(t, t') \in \left[0, \frac{T}{2}\right]^2$, $|f_\alpha(t) - f_\alpha(t')| \leqslant |t-t'|^\alpha \leqslant 2|t-t'|^\alpha$,
- si $(t, t') \in \left[\frac{T}{2}, T\right]^2$, $|f_\alpha(t) - f_\alpha(t')| \leqslant |t-t'|^\alpha \leqslant 2|t-t'|^\alpha$,
- si par exemple $0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{2} \leqslant t' \leqslant T$, $|f_\alpha(t) - f_\alpha(t')| \leqslant 2|t-t'|^\alpha$.

Finalement, $\forall (t, t') \in [0, T]^2$, $|f_\alpha(t) - f_\alpha(t')| \leqslant 2|t-t'|^\alpha$. Ceci montre que la restriction de f_α à $[0, T]$ appartient à $H^\alpha([0, T], \mathbb{K})$.

c) Montrons que $f_\alpha \in H^\alpha_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme dans la question 7.a), on peut trouver $\widetilde{x} = x + kT$, $k \in \mathbb{Z}$, et $\widetilde{y} = x + k'T$, $k' \in \mathbb{Z}$, tels que $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in [0, T]^2$ et $|\widetilde{x} - \widetilde{y}| \leqslant |y - x|$. Par T-périodicité, on a alors

$$|f(x) - f(y)| = |f(\widetilde{x}) - f(\widetilde{y})| \leqslant 2\,|\widetilde{x} - \widetilde{y}|^\alpha \leqslant 2|x-y|^\alpha.$$

Ceci montre que $f_\alpha \in H^\alpha_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $\beta > \alpha$. Supposons par l'absurde que $f_\alpha \in H^\beta_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Il existe donc $c \geqslant 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| \leqslant c|x-y|^\beta$. En particulier, pour tout réel t de $[0, T]$,

$$t^\alpha = |f_\alpha(t) - f_\alpha(0)| \leqslant c|t-0|^\beta = ct^\beta,$$

puis pour tout $t \in]0, T]$, $t^{\alpha-\beta} \leqslant c$. Par suite, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-\beta}$ est bornée sur $]0, T]$ mais ceci est absurde car $\lim\limits_{t \to 0} t^{\alpha-\beta} = +\infty$ (puisque $\alpha - \beta < 0$).

Donc, si $\beta > \alpha$, $f_\alpha \notin H^\beta_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

10) Soit $\alpha \in]0, 1[$. La fonction $h_\alpha\ :\ u \mapsto u^{\alpha-2}(1 - \cos u)$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Etude en 0. $u^{\alpha-2}(1 - \cos u) \underset{u \to 0}{\sim} u^{\alpha-2} \times \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}u^\alpha \underset{u \to 0}{\to} 0$ car $\alpha > 0$. Donc, la fonction h_α se prolonge par continuité en 0 et en particulier, la fonction h_α est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

Etude en $+\infty$. $u^{\alpha-2}(1-\cos u) \underset{u\to 0}{=} u^{\alpha-2}O(1) \underset{u\to 0}{=} O\left(u^{\alpha-2}\right)$ avec $\alpha-2<-1$ car $\alpha<1$. Donc, la fonction h_α est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

En résumé, la fonction h_α est intégrable sur $]0,+\infty[$ et donc l'intégrale proposée converge.

Enfin, I_α est l'intégrale sur $]0,+\infty[$ d'une fonction continue, positive et non nulle sur $]0,+\infty[$. On en déduit que $I_\alpha>0$.

11) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par T-périodicité de la fonction $t\mapsto f_\alpha(t)e^{-in\omega t}$ ($e^{-in\omega(t+T)}=e^{-in\omega t-2in\pi}=e^{-in\omega t}$) puis parité de f_α,

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f_\alpha(t)e^{-in\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_\alpha(t)e^{-in\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f_\alpha(t)e^{-in\omega t}\,dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f_\alpha(t)e^{-in\omega t}\,dt\right)\\
&= \frac{1}{T}\left(\int_{\frac{T}{2}}^{0} f_\alpha(-u)e^{in\omega u}\,(-du) + \int_0^{\frac{T}{2}} f_\alpha(t)e^{-in\omega t}\,dt\right) = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t^\alpha\left(e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}\right)dt\\
&= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t^\alpha\cos(n\omega t)\,dt
\end{aligned}$$

puis, en posant $u=n\omega t$ (et en tenant compte de $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ de sorte que, par exemple, $\omega T=2\pi$),

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t^\alpha\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{n\omega\frac{T}{2}}\left(\frac{u}{n\omega}\right)^\alpha\cos(u)\,\frac{du}{n\omega} = \frac{2}{n^{\alpha+1}\dfrac{2\pi}{\omega}\omega^{\alpha+1}}\int_0^{n\pi} u^\alpha\cos(u)\,du\\
&= \frac{1}{\pi\omega^\alpha n^{\alpha+1}}\int_0^{n\pi} u^\alpha\cos(u)\,du.
\end{aligned}$$

Une première intégration par parties, licite car $\alpha>0$, fournit

$$\int_0^{n\pi} u^\alpha\cos(u)\,du = \left[u^\alpha\sin(u)\right]_0^{n\pi} - \alpha\int_0^{n\pi} u^{\alpha-1}\sin(u)\,du = -\alpha\int_0^{n\pi} u^{\alpha-1}\sin(u)\,du.$$

Soit alors $\varepsilon\in]0,n\pi]$. Une seconde intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^{n\pi} u^{\alpha-1}\sin(u)\,du &= \left[u^{\alpha-1}(1-\cos(u))\right]_\varepsilon^{n\pi} - (\alpha-1)\int_\varepsilon^{n\pi} u^{\alpha-2}(1-\cos(u))\,du\\
&= (n\pi)^{\alpha-1}\left(1-(-1)^n\right) - \varepsilon^{\alpha-1}(1-\cos(\varepsilon)) - (\alpha-1)\int_\varepsilon^{n\pi} u^{\alpha-2}(1-\cos(u))\,du
\end{aligned}$$

Or, $\varepsilon^{\alpha-1}(1-\cos(\varepsilon)) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \varepsilon^{\alpha-1}\dfrac{\varepsilon^2}{2} = \dfrac{1}{2}\varepsilon^{\alpha+1} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$ (car $\alpha+1>0$). Quand ε tend vers 0, on obtient

$$\int_0^{n\pi} u^{\alpha-1}\sin(u)\,du = (n\pi)^{\alpha-1}\left(1-(-1)^n\right) - (\alpha-1)\int_0^{n\pi} u^{\alpha-2}(1-\cos(u))\,du$$

puis

$$c_n(f) = \frac{1}{\pi\omega^\alpha n^{\alpha+1}}\int_0^{n\pi} u^\alpha\cos(u)\,du = \frac{-\alpha}{\pi\omega^\alpha n^{\alpha+1}}\left((n\pi)^{\alpha-1}\left(1-(-1)^n\right) - (\alpha-1)\int_0^{n\pi} u^{\alpha-2}(1-\cos(u))\,du\right).$$

En particulier (erreur d'énoncé ?),

$$c_{2n}(f) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\pi\omega^\alpha(2n)^{\alpha+1}}\int_0^{2n\pi} u^{\alpha-2}(1-\cos(u))\,du \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha(\alpha-1)I_\alpha}{\pi\omega^\alpha(2n)^{\alpha+1}}.$$

b) Puisque $\alpha\in]0,1[$, $\alpha+1\in]1,2[$ et donc $c_{2n}(f)$ est prépondérant devant $\dfrac{1}{(2n)^2}$ quand n tend vers $+\infty$ puis $c_n(f)$ n'est pas négligeable devant $\dfrac{1}{n^2}$ quand n tend vers $+\infty$. Donc, $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ n'appartient pas à F.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

Partie IV.

12) a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{2(n+1-(k+1))} - \frac{1}{2(n+1-k)} = \frac{1}{2(n-k)} - \frac{1}{2(n+1-k)} = \frac{1}{2(n-k)(n+1-k)} > 0.$$

D'autre part, $x_1 = \dfrac{1}{2n} > 0 = x_0$ et $x_n = \dfrac{1}{2} < 1 = x_{n+1}$. Finalement, $x = (x_0, \ldots, x_{n+1})$ « est croissant » et $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$. Donc, x est une subdivision de $[0, 1]$.

b) La fonction φ est continue sur $]0, 1]$.
Pour $x \in]0, 1]$, $|\varphi(x)| = x \left|\cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)\right| \leqslant x$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0$. Ainsi, la fonction φ se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$ (on note encore φ le prolongement obtenu). La fonction φ est alors continue sur $[0, 1]$.

Soient $n \geqslant 2$ puis $x = (x_0, \ldots, x_{n+1})$ la subdivision de la question précédente.

$$\begin{aligned}
V_x(\varphi) &= \sum_{k=0}^{n} |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| = |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| + \sum_{k=1}^{n-1} |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)| \\
&= \frac{1}{2n}|\cos(n\pi)| + \sum_{k=1}^{n-1} \left|\frac{1}{2(n-k)}\cos((n-k)\pi) - \frac{1}{2(n+1-k)}\cos((n+1-k)\pi)\right| + \frac{1}{2}|\cos(\pi)| \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} |\cos((n-k)\pi)| \left|\frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2(n+1-k)}\right| \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2(n-k)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2(n+1-k)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\, dt = \ln(n+1).
\end{aligned}$$

Mais alors, pour tout $n \geqslant 2$, $V_{[0,1]}(\varphi) \geqslant \ln(n+1)$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $V_{[0,1]}(\varphi) = \infty$. La fonction φ n'est pas à variations bornées sur $[0, 1]$.

13) a) Soit f une application croissante sur $[a, b]$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $x = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in S_{[a,b]}$.

$$V_x(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a).$$

Ainsi, $\left\{V_x(f),\ x \in S_{[a,b]}\right\}$ est le singleton $\{f(b) - f(a)\}$. On en déduit que f est à variations bornées sur $[a, b]$ et que $V_{[a,b]}(f) = f(b) - f(a)$.

Si f est décroissante sur $[a, b]$, $-f$ est croissante sur $[a, b]$ puis $V_{[a,b]}(f) = V_{[a,b]}(-f) = -f(b) + f(a)$. Finalement, si f est monotone sur $[a, b]$, f est à variations bornées et $V_{[a,b]}(f) = |f(b) - f(a)|$.

b) $H^1([a, b], \mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $f \in H^1([a, b], \mathbb{K})$. Il existe $c \geqslant 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, $|f(b) - f(a)| \leqslant c|b - a|$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $x = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in S_{[a,b]}$.

$$V_x(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant c \sum_{k=0}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| = c \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = c(b - a).$$

Ainsi, $\left\{V_x(f),\ x \in S_{[a,b]}\right\}$ est une partie majorée (par $c(b - a)$) de $\mathbb{R}$. On en déduit que f est à variations bornées et que $V_{[a,b]}(f) \leqslant c(b - a)$.

Soit maintenant $f \in C^1([a, b], \mathbb{K})$. On sait que la fonction f' est bornée sur le segment $[a, b]$ puis que f est lipschitzienne sur $[a, b]$, de rapport $\|f'\|_{\infty,[a,b]}$. D'après ce qui précède, f est à variations bornées sur $[a, b]$ et de plus, $V_{[a,b]}(f) \leqslant \|f'\|_{\infty,[a,b]}(b - a)$.

14) a) Vérifions que $VB([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{[a,b]}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

La fonction nulle est dans $VB([a,b],\mathbb{K})$ et de plus, $V_{[a,b]}(0)=0$.
Soient $(f,g)\in(VB([a,b],\mathbb{K}))^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ puis $x=(x_k)_{0\leqslant x\leqslant n}\in S_{[a,b]}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}|(\lambda f+\mu g)(x_{k+1})-(\lambda f+\mu g)(x_k)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(|\lambda|\,|f(x_{k+1})-f(x_k)|+|\mu|\,|g(x_{k+1})-g(x_k)|)\\ &=|\lambda|\sum_{k=0}^{n-1}|\,|f(x_{k+1})-f(x_k)|+|\mu|\sum_{k=0}^{n-1}|\,|g(x_{k+1})-g(x_k)|\\ &=|\lambda|V_x(f)+|\mu|V_x(g)\leqslant|\lambda|V_{[a,b]}(f)+|\mu|V_{[a,b]}(g).\end{aligned}$$

Donc, l'ensemble $\left\{V_x(\lambda f+\mu g),\ x\in S_{[a,b]}\right\}$ est majoré par $|\lambda|V_{[a,b]}(f)+|\mu|V_{[a,b]}(g)$. On en déduit que $\lambda f+\mu g\in VB([a,b],\mathbb{K})$ et que $V_{[a,b]}(\lambda f+\mu g)\leqslant|\lambda|V_{[a,b]}(f)+|\mu|V_{[a,b]}(g)$.

b) Supposons d'abord $\lambda>0$. $\widetilde{f}$ est définie sur $\left[\dfrac{a-\mu}{\lambda},\dfrac{b-\mu}{\lambda}\right]=[a',b']$. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ puis $x'=(x'_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\in S_{[a',b']}$. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, posons encore $x_k=\lambda x'_k+\mu$ puis posons $x=(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\in S_{[a,b]}$.

$$\begin{aligned}V_{x'}\left(\widetilde{f}\right)&=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\widetilde{f}(x'_{k+1})-\widetilde{f}(x'_k)\right|=\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\lambda x'_{k+1}+\mu\right)-f\left(\lambda x'_k+\mu\right)\right|\\ &=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=V_x(f)\\ &\leqslant V_{[a,b]}(f).\end{aligned}$$

Donc, $\widetilde{f}$ est à variations bornées sur $\left[\dfrac{a-\mu}{\lambda},\dfrac{b-\mu}{\lambda}\right]$ et de plus, $V_{\left[\frac{a-\mu}{\lambda},\frac{b-\mu}{\lambda}\right]}\left(\widetilde{f}\right)\leqslant V_{[a,b]}(f)$. En appliquant ce résultat à la fonction $t\mapsto\widetilde{f}\left(\dfrac{t-\mu}{\lambda}\right)$ (avec $\dfrac{1}{\lambda}>0$) de sorte que $\widetilde{\left(\widetilde{f}\right)}=f$, on a aussi $V_{[a,b]}(f)\leqslant V_{\left[\frac{a-\mu}{\lambda},\frac{b-\mu}{\lambda}\right]}\left(\widetilde{f}\right)$.

Finalement, si $\lambda>0$, $V_{\left[\frac{a-\mu}{\lambda},\frac{b-\mu}{\lambda}\right]}\left(\widetilde{f}\right)=V_{[a,b]}(f)$.

Supposons maintenant $\lambda<0$. Soit $g\ :\ t\mapsto f(-t)$ puis $\widetilde{g}\ :\ t\mapsto g(-\lambda t-\mu)=f(\lambda t+\mu)$ avec $-\lambda>0$. D'après ce qui précède, $V_{\left[\frac{b-\mu}{\lambda},\frac{a-\mu}{\lambda}\right]}\left(\widetilde{f}\right)=V_{\left[\frac{-b+\mu}{-\lambda},\frac{-a+\mu}{-\lambda}\right]}(\widetilde{g})=V_{[-b,-a]}(g)$ et d'autre part, il est clair que $V_{[-b,-a]}(g)=V_{[a,b]}(f)$. Dans ce cas aussi $\widetilde{f}$ est à variations bornées sur $\left[\dfrac{b-\mu}{\lambda},\dfrac{a-\mu}{\lambda}\right]$ et de $V_{\left[\frac{a-\mu}{\lambda},\frac{b-\mu}{\lambda}\right]}\left(\widetilde{f}\right)=V_{[a,b]}(f)$.

Dans tous les cas, $\widetilde{f}$ est à variations bornées (sur $\left[\dfrac{a-\mu}{\lambda},\dfrac{b-\mu}{\lambda}\right]$ ou $\left[\dfrac{a-\mu}{\lambda},\dfrac{b-\mu}{\lambda}\right]$ suivant que $\lambda>0$ ou $\lambda<0$) et sa variation est égale à celle de f sur $[a,b]$.

15) Supposons $f\in VB([a,b],\mathbb{K})$. Soit $x=(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\in S_{[a,c]}$. Alors, $(x'_k)_{0\leqslant n+1}=(x_0,\dots,x_n,b)\in S_{[a,b]}$ puis

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(x'_{k+1}\right)-f\left(x'_k\right)\right|\leqslant V_{[a,b]}(f).$$

Donc, $f\in VB([a,c],\mathbb{K})$ et $V_{[a,c]}(f)\leqslant V_{[a,b]}(f)$. De même, $f\in VB([c,b],\mathbb{K})$ et $V_{[c,b]}(f)\leqslant V_{[a,b]}(f)$. Plus précisément, soient $x=(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\in S_{[a,c]}$ et $y=(y_k)_{0\leqslant k\leqslant p}\in S_{[c,b]}$. En particulier, $x_n=y_0=c$. Pour $k\in[\![0,n+p+1]\!]$, on pose $z_k=\left\{\begin{array}{l}x_k\text{ si }0\leqslant k\leqslant n\\ y_{k-(n+1)}\text{ si }n+1\leqslant k\leqslant n+p+1\end{array}\right.$. $(z_k)_{0\leqslant k\leqslant n+p+1}$ est une subdivision de $[a,b]$ et donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|+\sum_{k=0}^{p-1}|f(y_{k+1})-f(y_k)|&=\sum_{k=0}^{n+p}|f(z_{k+1})-f(z_k)|\ \text{(en tenant compte de }z_n=z_{n+1})\\ &\leqslant V_{[a,b]}(f).\end{aligned}$$

Donc, $y=(y_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ étant une subdivision fixée de $[c,b]$, pour tout $x\in S_{[a,c]}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\leqslant V_{[a,b]}(f)-\sum_{k=0}^{p-1}|f(y_{k+1})-f(y_k)|.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

Une borne supérieure étant le plus petit des majorants, on en déduit que

$$V_{[a,c]}(f) \leqslant V_{[a,b]}(f) - \sum_{k=0}^{p-1} |f(x_{y+1}) - f(y_k)|.$$

Mais alors, pour tout $y \in S_{[c,b]}$, $V_y(f) \leqslant V_{[a,b]}(f) - V_{[a,c]}(f)$ et donc $V_{[c,b]}(f) \leqslant V_{[a,b]}(f) - V_{[a,c]}(f)$. Finalement, $V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f) \leqslant V_{[a,b]}(f)$.

Réciproquement, supposons que $f \in VB([a,c],\mathbb{K}) \cap VB([c,b],\mathbb{K})$. Soit $(z_k)_{0\leqslant\leqslant n} \in S_{[a,b]}$. Puisque $c \in]a,b[$, il existe $k_0 \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $z_{k_0} \leqslant c$ et $z_{k_0+1} \geqslant c$. Soit $z' = (z_0,\ldots,z_{k_0},c,c,z_{k_0+1},\ldots,z_n) = (z'_k)_{0\leqslant k\leqslant n+2}$. $x = (z_0,\ldots,z_{k_0},c) \in S_{[a,c]}$ et $y = (c,z_{k_0+1},\ldots,z_n) \in S_{[c,b]}$. Donc

$$V_z(f) = \sum_{k=0}^{n} |f(z_{k+1}) - f(z_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{n+2} \left|f\left(z'_{k+1}\right) - f\left(z'_k\right)\right| \leqslant V_x(f) + V_y(f) \leqslant V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f).$$

Donc, f est à variations bornées sur $[a,b]$ et $V_{[a,b]}(f) \leqslant V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f)$.

En résumé, f est à variations bornées sur $[a,b]$ si et seulement si f est à variations bornées sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et dans ce cas,

$$V_{[a,b]}(f) = V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f).$$

16) a) Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Soient $K \in \mathbb{N}^*$ puis $k \in [\![1,K]\!]$. Pour $t \in [x_{k-1},x_k]$, (x_{k-1},t,x_k) est une subdivision de $[x_{k-1},x_k]$ et donc, pour $t \in [x_{k-1},x_k]$,

$$|f(t) - f(x_k)| \leqslant |f(t) - f(x_{k-1})| + |f(x_k) - f(t)| \leqslant V_{[x_{k-1},x_k]}(f).$$

On en déduit que pour tout $k \in [\![1,K]\!]$,

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k))\, e^{-in\omega t}\, dt\right| \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(x_k)|\, dt \leqslant V_{[x_{k-1},x_k]}(f)\,(x_k - x_{k-1}),$$

puis

$$\left|\sum_{k=1}^{K}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k))\, e^{-in\omega t}\, dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^{K}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k))\, e^{-in\omega t}\, dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^{K} V_{[x_{k-1},x_k]}(f)\,(x_k - x_{k-1}).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{K}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\, e^{-2in\pi t/T}\, dt\right| &= \left|\sum_{k=1}^{K} f(x_k)\left[\frac{e^{-2in\pi t/T}}{-2in\pi/T}\right]_{x_{k-1}}^{x_k}\right| = \frac{T}{2|n|\pi}\left|\sum_{k=1}^{K} f(x_k)\left(e^{-2in\pi x_k/T} - e^{-2in\pi x_{k-1}/T}\right)\right| \\
&= \frac{1}{|n|\omega}\left|\sum_{k=1}^{K} f(x_k)\, e^{-2in\pi x_k/T} - \sum_{k=1}^{K} f(x_k)\, e^{-2in\pi x_{k-1}/T}\right| \\
&= \frac{1}{|n|\omega}\left|\sum_{k=1}^{K} f(x_k)\, e^{-2in\pi x_k/T} - \sum_{k=0}^{K-1} f(x_{k+1})\, e^{-2in\pi x_k/T}\right| \\
&= \frac{1}{|n|\omega}\left|-f(x_1)\, e^{-2in\pi x_0/T} + \sum_{k=1}^{K-1} (f(x_k) - f(x_{k+1}))\, e^{-2in\pi x_k/T} + f(x_K)\, e^{-2in\pi x_K/T}\right| \\
&= \frac{1}{|n|\omega}\left|-f(x_1) + \sum_{k=1}^{K-1} (f(x_k) - f(x_{k+1}))\, e^{-2in\pi x_k/T} + f(T)\right| \\
&= \frac{1}{|n|\omega}\left|f(x_0) - f(x_1) + \sum_{k=1}^{K-1} (f(x_k) - f(x_{k+1}))\, e^{-2in\pi x_k/T}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{|n|\omega}\sum_{k=0}^{K-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| = \frac{V_x(f)}{|n|\omega} \\
&\leqslant \frac{V_{[0,1]}(f)}{|n|\omega}.
\end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

b) On choisit pour $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant K}$ une subdivision à pas constant : $\forall k\in[\![0,T]\!]$, $x_k=\dfrac{kT}{K}$.

Pour $n\in\mathbb{Z}^*$, on a alors

$$\begin{aligned}
|c_n(f)| &= \frac{1}{T}\left|\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt\right| = \frac{1}{T}\left|\sum_{k=1}^{K}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)e^{-in\omega t}\,dt\right| \\
&= \frac{1}{T}\left|\sum_{k=1}^{K}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(f(t)-f(x_k)\right)e^{-in\omega t}\,dt+\sum_{k=1}^{K}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\,e^{-in\omega t}\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{T}\left|\sum_{k=1}^{K}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(f(t)-f(x_k)\right)e^{-in\omega t}\,dt\right|+\frac{1}{T}\left|\sum_{k=1}^{K}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\,e^{-in\omega t}\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{K}V_{[x_{k-1},x_k]}(f)\,(x_k-x_{k-1})+\frac{1}{T}\times\frac{V_{[0,1]}(f)}{|n|\omega}\ \text{(d'après a))} \\
&= \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}V_{[x_{k-1},x_k]}(f)+\frac{V_{[0,1]}(f)}{2\pi|n|} \\
&= \frac{V_{[0,1]}(f)}{K}+\frac{V_{[0,1]}(f)}{2\pi|n|}
\end{aligned}$$

Cette majoration est vraie pour tout entier naturel non nul K et tout $n\in\mathbb{Z}^*$. Quand K tend vers $+\infty$, n étant fixé, on obtient

$$\forall n\in\mathbb{Z}^*,\ |c_n(f)|\leqslant\frac{V_{[0,1]}(f)}{2\pi|n|}.$$

En particulier, $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty}|c_n(f)|=0$.

Partie V.

17) a) Soient $\alpha\in]0,1[$ puis $p\in\left]1,\dfrac{1}{\alpha}\right[$. Puisque $p>1$, la série de terme général $\dfrac{1}{k^p}$, $k\in\mathbb{N}^*$, converge. Posons donc $\sigma_p=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^p}$. σ_p est un réel strictement supérieur à 1. Soit alors $\rho=\dfrac{1}{\sigma_p}\in]0,1[$.

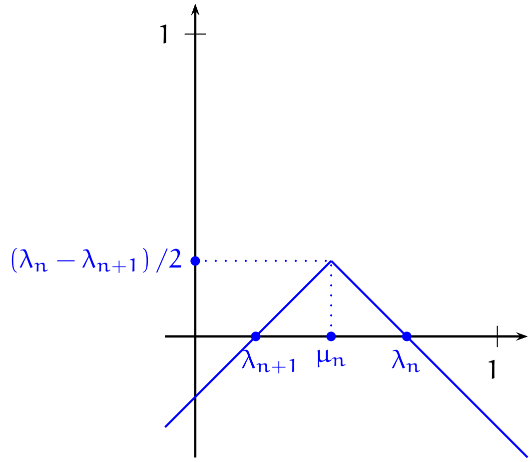
Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $\lambda_n=1$ si $n=0$ et $\lambda_n=1-\rho\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ si $n\geqslant1$. La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1-\rho\sigma_p=0$.

b) La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante à valeurs dans $[1,\sigma_p[$ puis la suite $\left(\dfrac{1}{\sigma_p}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante à valeurs dans $\left[\dfrac{1}{\sigma_p},1\right[\subset[0,1[$. La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}=\left(1-\dfrac{1}{\sigma_p}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante à valeurs dans $\left]1-1,1-\dfrac{1}{\sigma_p}\right[\subset]0,1]$.
En tenant compte de $\lambda_0=1$, la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à valeurs dans $]0,1]$.

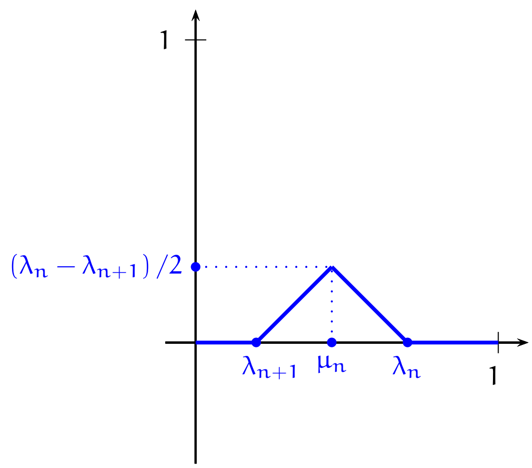
18) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, λ_n et λ_{n+1} sont dans $]0,1]$ puis μ_n est dans $]0,1]$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_n-\lambda_{n+1}$ est dans $]0,1]$ puis $\dfrac{\lambda_n-\lambda_{n+1}}{2}$ est dans $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$.

Graphe de la fonction $t\mapsto\dfrac{\lambda_n-\lambda_{n+1}}{2}-|t-\mu_n|$.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.



Graphe de la fonction $t \mapsto \dfrac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{2} - |t - \mu_n|$**.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, $g_n(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leqslant t < \lambda_{n+1} \\ t - \lambda_{n+1} \text{ si } \lambda_{n+1} \leqslant t < \mu_n \\ \lambda_n - t \text{ si } \mu_n \leqslant t < \lambda_n \\ 0 \text{ si } \lambda_n \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$.



Les restrictions de g_n à $[0, \lambda_{n+1}]$, $[\lambda_{n+1}, \mu_n]$, $[\mu_n, \lambda_n]$ et $[\lambda_n, 1]$ sont de classe C^1 sur chacun de ces intervalles et en particulier à variations bornées sur chacun de ces intervalles d'après la question 13.b). De plus, g_n est monotone sur chacun de ces intervalles et donc, d'après la question 13.a),

- $V_{[0,\lambda_{n+1}]}(g_n) = |g_n(\lambda_{n+1}) - g_n(0)| = 0$,
- $V_{[\lambda_{n+1},\mu_n]}(g_n) = |g_n(\mu_n) - g_n(\lambda_{n+1})| = \dfrac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{2}$,
- $V_{[\mu_n,\lambda_n]}(g_n) = |g_n(\lambda_n) - g_n(\mu_n)| = \dfrac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{2}$,
- $V_{[\lambda_n,1]}(g_n) = |g_n(1) - g_n(\lambda_n)| = 0$.

Mais alors, g_n est à variations bornées sur $[0,1]$ d'après la question 15, et en particulier dans $H^1([0,1], \mathbb{R})$ d'après la question 13.b), et de plus

$$\begin{aligned} V_{[0,1]}(g_n) &= V_{[0,\lambda_{n+1}]}(g_n) + V_{[\lambda_{n+1},\mu_n]}(g_n) + V_{[\mu_n,\lambda_n]}(g_n) + V_{[\lambda_n,1]}(g_n) \\ &= 0 + |f(\mu_n) - f(\lambda_{n+1})| + |f(\lambda_n) - f(\mu_n)| + 0 = 2 \times \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{2} \\ &= \lambda_n - \lambda_{n+1} = \frac{1}{\sigma_p (n+1)^p} (\text{où } \sigma_p = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}). \end{aligned}$$

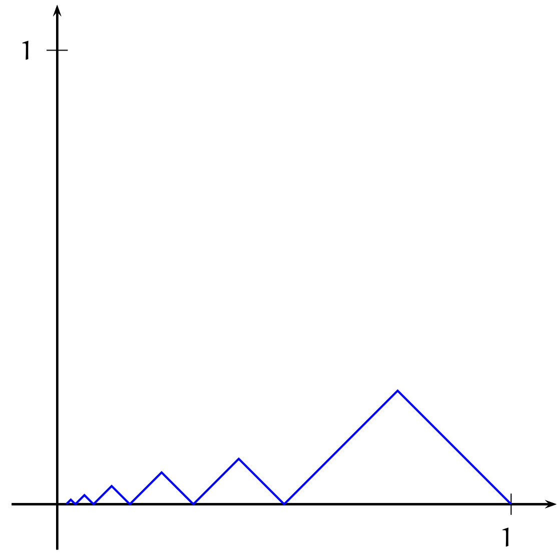
b) (on suppose une erreur d'énoncé et on prend $h = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g_k$.) Soit $t \in [0,1]$.

- Si $t = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k(t) = g_k(0) = 0$ puis $h(0)$ existe et $h(0) = 0$.
- Si $t \in]0,1]$, puisque la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir du rang 1 et converge vers 0, il existe un unique $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda_{k_0+1} < t \leqslant \lambda_{k_0}$. Par suite, si $k \neq k_0$, $g_k(t) = 0$ et donc $h(t)$ existe et $h(t) = g_{k_0}(t)$.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

En résumé, la fonction h est définie sur $[0,1]$.

Une idée du graphe de h.



Vérifions maintenant que $h \in H^1([0,1],\mathbb{R})$. Soit $(t,t') \in [0,1]^2$ tel que $t < t'$.

• Si $t = 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_{k+1} < t' \leqslant \lambda_k$ et donc (en s'appuyant sur le graphe de g_k),

$$|h(t) - h(t')| = g_k(t') \leqslant t' = |t - t'|.$$

• Sinon, il existe deux entiers naturels k et ℓ tels que $\lambda_{k+1} < t \leqslant \lambda_k$ et $\lambda_{\ell+1} < t' \leqslant \lambda_\ell$. Puisque $t < t'$, on a $\lambda_k \leqslant \lambda_\ell$ ou encore $k \geqslant \ell$.
- Si $k = \ell$, puisque $g_k \in H^1([0,1],\mathbb{R})$, $|h(t) - h(t')| = |g_k(t) - g_k(t')| \leqslant |t - t'|$.
- Sinon $k > \ell$ ou encore $\lambda_k < \lambda_\ell$ ou aussi $\lambda_k \leqslant \lambda_{\ell+1}$ et dans ce cas,

$$\begin{aligned}
|h(t) - h(t')| = |g_k(t) - g_\ell(t')| &\leqslant |g_k(t) - g_k(\lambda_k)| + |g_k(\lambda_k) - g_\ell(\lambda_{\ell+1})| + |g_\ell(\lambda_{\ell+1}) - g_\ell(t')| \\
&= |g_k(t) - g_k(\lambda_k)| + |g_\ell(\lambda_{\ell+1}) - g_\ell(t')| \\
&\leqslant |t - \lambda_k| + |\lambda_{\ell+1} - t'| = (\lambda_k - t) + (t' - \lambda_{\ell+1}) \\
&= t' - t + \lambda_k - \lambda_{\ell+1} \\
&\leqslant t' - t = |t - t'|.
\end{aligned}$$

En résumé, pour tout $(t,t') \in [0,1]^2$, $l h(t) - h(t')| \leqslant |t - t'|$. Donc, $h \in H^1([0,1],\mathbb{R})$.

c) Soit $(t,t') \in [0,1]^2$. On a vu à la question 9.a) que si u et u' sont deux réels positifs et $\alpha \in]0,1[$, alors $|u^\alpha - u'^\alpha| \leqslant |u - u'|^\alpha$. Donc,

$$\begin{aligned}
|h(t)^\alpha - h(t')^\alpha| &\leqslant |h(t) - h(t')|^\alpha \\
&\leqslant |t - t'|^\alpha \text{ (puisque } h \in H^1([0,1],\mathbb{R}) \text{ et par croissance de } x \mapsto x^\alpha \text{ sur } [0,+\infty[\text{ car } \alpha > 0).
\end{aligned}$$

Ceci montre que $h^\alpha \in H^\alpha([0,1],\mathbb{R})$.

19) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
V_{[\lambda_n,1]}(h^\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} V_{[\lambda_{k+1},\lambda_k]}(h^\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} V_{[\lambda_{k+1},\lambda_k]}(g_k^\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sigma_p (k+1)^p}\right)^\alpha \\
= \frac{1}{\sigma_p^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p\alpha}}.
\end{aligned}$$

b) Si $h^\alpha \in VB([0,1],\mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$V_{[0,1]}(h^\alpha) = V_{[\lambda_n,1]}(h^\alpha) + V_{[0,\lambda_n]}(h^\alpha) \geqslant V_{[0,\lambda_n]}(h^\alpha) = \frac{1}{\sigma_p^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p\alpha}} \quad (*).$$

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

Puisque $p \in \left]1, \dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a $p\alpha < 1$ et donc la série de terme général $\dfrac{1}{k^{p\alpha}}$, $k \geqslant 2$, diverge. Quand n tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient $V_{[0,1]}(h^\alpha) = +\infty$ ce qui contredit le fait que $h^\alpha \in VB([0,1],\mathbb{R})$. Donc, $h^\alpha \notin VB([0,1],\mathbb{R})$

20) a) La fonction h^α est dans $H^\alpha([0,1],\mathbb{R})$ d'après la question 18.c) et n'est pas dans $VB([0,1],\mathbb{R})$. Donc, $H^\alpha([0,1],\mathbb{R}) \not\subset VB([0,1],\mathbb{R})$.

Soit alors $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ $(a < b)$. Pour $t \in [a,b]$, posons $\widetilde{h}(t) = h\left(\dfrac{t-a}{b-a}\right)$ de sorte que $\widetilde{h}$ est définie sur $[a,b]$. D'après la question 14.b, puisque h^α n'est pas à variations bornées sur $[0,1]$, $\widetilde{h}^\alpha$ n'est pas à variations bornées sur $[a,b]$. D'autre part, $\widetilde{h}^\alpha$ est dans $H^\alpha([a,b],\mathbb{R})$ car, pour tout $(t,t') \in [a,b]^2$,

$$\left|\widetilde{h}(t)^\alpha - \widetilde{h}(t')^\alpha\right| = \left|h\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^\alpha - h\left(\frac{t'-a}{b-a}\right)^\alpha\right| \leqslant \left|\frac{t-t'}{b-a}\right|^\alpha = \frac{1}{(b-a)^\alpha}|t-t'|^\alpha.$$

Donc, $H^\alpha([a,b],\mathbb{R}) \not\subset VB([a,b],\mathbb{R})$.

b) D'après la question 13.b), $VB([a,b],\mathbb{K})$ contient $H^1([a,b],\mathbb{K})$. En adaptant le résultat de la question 5.a), si $\beta > 1$, $VB([a,b],\mathbb{K})$ contient $H^\beta([a,b],\mathbb{K})$, l'ensemble des fonctions constantes sur $[a,b]$. Enfin, d'après ce qui précède, si $\beta \in]0,1[$, $VB([a,b],\mathbb{K})$ ne contient pas $H^\beta([a,b],\mathbb{K})$. En résumé,

$$\forall \beta > 0,\ \left((H^\alpha([a,b],\mathbb{R}) \subset VB([a,b],\mathbb{R}) \Leftrightarrow \beta \geqslant 1\right).$$

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.