

Asie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

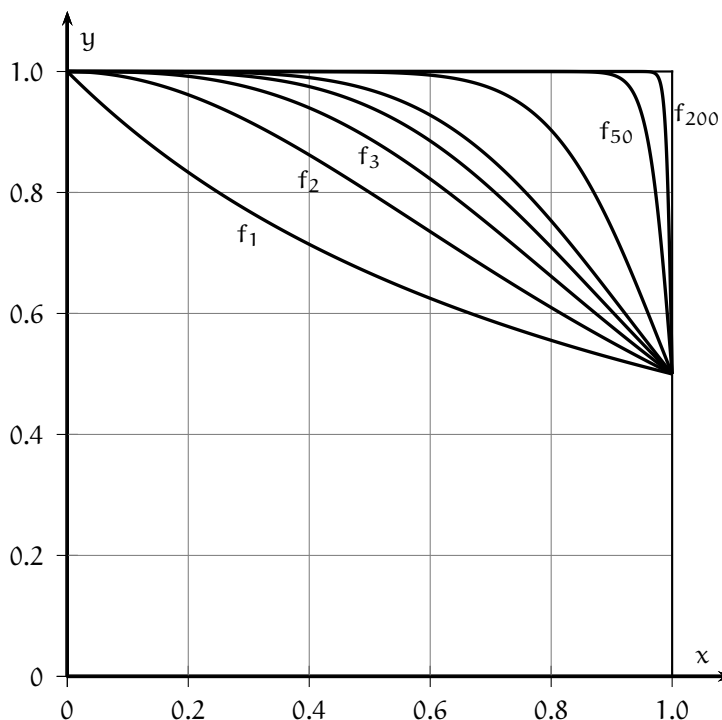
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$$

1) Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.



En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2) Calculer la valeur exacte de I_1 .

3) a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $I_n \leq 1$.

4) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}.$$

5) Calculer l'intégrale $\int_0^1 (1 - x^n) dx$.

6) À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7) On considère l'algorithme suivant :

Variables	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0
Traitement	Demander un entier $n \geq 1$ Demander un entier $p \geq 1$ Pour k allant de 0 à $p - 1$ faire : x prend la valeur $\frac{k}{p}$ I prend la valeur $I + \frac{1}{1 + x^n} \times \frac{1}{p}$ Fin pour Afficher I

a) Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b) Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n .

Asie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la fonction f_n est continue et positive sur l'intervalle $[0, 1]$, I_n est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan \mathcal{D}_n compris entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction f_n d'une part, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.

Le graphique suggère que l'aire du domaine \mathcal{D}_n converge vers l'aire du carré de sommets les points de coordonnées $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 1)$ ou encore il semble que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ soit convergente de limite 1.

$$2) I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

$$I_1 = \ln(2).$$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x de $[0, 1]$, $x^n \geq 0$ puis $1+x^n \geq 1$ et donc $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$ par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$. On a montré que

$$\text{pour tout } x \text{ de } [0, 1] \text{ et tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

b) Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 1 dx$ avec $\int_0^1 1 dx = 1 \times (1-0) = 1$. Donc,

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, I_n \leq 1.$$

4) Soit $n \geq 1$. Pour tout réel x de $[0, 1]$,

$$\frac{1}{1+x^n} - (1-x^n) = \frac{1 - (1-x^n)(1+x^n)}{1+x^n} = \frac{1 - (1-x^{2n})}{1+x^n} = \frac{x^{2n}}{1+x^n}.$$

On en déduit que pour tout réel x de $[0, 1]$, $\frac{1}{1+x^n} - (1-x^n) \geq 0$ ou encore $1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$.

$$\text{Pour tout } x \text{ de } [0, 1] \text{ et tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, 1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n}.$$

5) Soit $n \geq 1$.

$$\int_0^1 (1-x^n) dx = \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = 1 - \frac{1^{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

6) Soit $n \geq 1$. D'après la question précédente et par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \geq \int_0^1 (1-x^n) dx = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n ,

$$1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite (I_n) converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1.$$

7) a) Valeurs successives obtenues par l'algorithme.

k	x	I
0	0	0,2
1	0,2	0,392
2	0,4	0,565
3	0,6	0,712
4	0,8	0,834

Si $n = 2$ et $p = 5$, l'algorithme renvoie la valeur 0,83 arrondi au centième.

b) L'algorithme donne une valeur approchée de l'intégrale I_n obtenue par la méthode des rectangles. Dans le cas $n = 2$ et $p = 5$, on a découpé l'intervalle en cinq intervalles de longueur égale à 0,2 puis on a construit les rectangles de hauteurs respectives $f(0)$, $f(0,2)$, $f(0,4)$, $f(0,6)$ et $f(0,8)$. La somme des aires de ces rectangles est une valeur approchée de I_2 par excès. Cela correspond au graphique suivant :

