Asie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur, peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2a}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)$$

où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g.

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation

$$(x-1)e^{2x} - 1 - x = 0.$$

Dans la suite, on définit sur $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$ pour tout réel $x \geqslant 0$.

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

2) On note f'' la fonction dérivée de f'.
Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f''(x) = 4xe^{2x}$.

3) Montrer que, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0.

4) a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ x_0]$.

b) Calculer $f(2)$.
En déduire que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.
Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

5) On admet sans démonstration que la longueur L de la chaîne est donnée par l'expression

$$L = \int_0^1 \left(e^{ax} + e^{-ax}\right)\ dx.$$

Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant $1,2$ comme valeur approchée du nombre a.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

Asie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) • La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel x de $[0, +\infty[$,

$$f'(x) = 1 \times e^{2x} + (x-1) \times 2e^{2x} - 1 = (1 + 2x - 2)e^{2x} - 1 = (2x-1)e^{2x} - 1.$$

• $f'(0) = -e^0 - 1 = -2$.
• $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1)e^{2x} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$

2) De même, la fonction f' est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel x de $[0, +\infty[$,

$$f''(x) = 2 \times e^{2x} + (2x-1) \times 2e^{2x} = (4x - 2 + 2)e^{2x} = 4xe^{2x}.$$

3) Ainsi, la fonction f' est dérivable sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée, à savoir la fonction f'', est strcitement positive sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction f' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

La fonction f' est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $\left[f'(0), \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)\right[= [-2, +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$.

En particulier, puisque 0 est dans $[-2, +\infty[$, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0.

4) a) Puisque la fonction f' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, pour $0 \leqslant x < x_0$, on a $f(x) < f'(x_0)$ ou encore $f'(x) < 0$ et pour $x > x_0$, on a $f'(x) > 0$.

On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, x_0]$ et est strictement croissante sur l'intervalle $[x_0, +\infty[$.

Puisque f est décroissante sur $[0, x_0]$, pour $0 \leqslant x \leqslant x_0$, on a $f(x) \leqslant f(0)$ avec $f(0) = -e^0 - 1 = -2$.
En particulier, la fonction f est strictement négative sur $[0, x_0]$. On note que $f'(2) = 3e^4 - 1 = 162,7\ldots > 0$ et en particulier que $x_0 < 2$.

b) $f(2) = e^4 - 3 = 51,5\ldots$ puis pour $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant f(2) > 0$ par croissance de la fonction f sur $[x_0, +\infty[$ et en particulier sur $[2, +\infty[$. Mais alors la fonction f ne s'annule pas sur $[2, +\infty[$.

Sur l'intervalle $[x_0, 2]$, la fonction f est continue et strictement croissante et vérifie $f(x_0) < 0$ et $f(2) > 0$. Comme à la question précédente, la fonction f s'annule une fois et une seule sur $[x_0, 2]$.

En résumé, la fonction f ne s'annule pas sur $[0, x_0]$ et sur $[2, +\infty[$ et s'annule une fois et une seule sur $[x_0, 2]$. Finalement, la fonction f s'annule sur $[0, +\infty[$ pour une unique valeur notée a. On note que la fonction f est strictement négative sur $[0, a[$ et strictement positive sur $]a, +\infty[$.

La calculatrice donne $f(1,195) = -0,06\ldots < 0$ et $f(1,2) = 0,04\ldots > 0$. Donc $1,195 < a < 1,2$. En particulier,

$$\boxed{a = 1,2 \text{ arrondi au centième.}}$$

5)

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \left(e^{ax} + e^{-ax}\right)\ dx = \left[\frac{e^{ax}}{a} + \frac{e^{-ax}}{-a}\right]_0^1 = \left(\frac{e^a}{a} - \frac{e^{-a}}{a}\right) - \left(\frac{e^0}{a} - \frac{e^0}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a}\left(e^a - e^{-a}\right) = \frac{1}{1,2}\left(e^{1,2} - e^{-1,2}\right) = 2,517\ldots. \end{aligned}$$

La longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités est environ $2,52$ unités de longueur.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.