

Antilles Guyane 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) On a $24x \leq 438$ et donc $x \leq \frac{438}{24}$ ou encore $x \leq 18,25$. Puisque x est un entier, on en déduit que $x \leq 18$.

De même, on a $45y \leq 438$ et donc $x \leq \frac{438}{45}$ ou encore $x \leq 9,7\dots$. Puisque y est un entier, on en déduit que $y \leq 9$.

$$x \leq 18 \text{ et } y \leq 9.$$

b) Algorithme complété.

Entrée	x et y sont des nombres
Traitement	Pour x variant de 0 à 18 Pour y variant de 0 à 9 Si $24x + 45y = 438$ Afficher x et y Fin Si Fin Pour Fin Pour
Fin traitement	

2) La somme des chiffres de 438 est 15 qui est divisible par 3. Donc 438 est divisible par 3. Plus précisément, $438 = 3 \times 146$. Ainsi, le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3) a) Les entiers $8 = 2^3$ et $15 = 3 \times 5$ n'ont pas de facteur premier commun. Donc les entiers 8 et 15 sont premiers entre eux. D'après le théorème de BÉZOUT, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $8u + 15v = 1$ ou encore, l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

b) $8 \times 2 + 15 \times (-1) = 16 - 15 = 1$. Donc le couple $(2, -1)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $8x + 15y = 1$.

c) Pour tous entiers relatifs x et y ,

$$24x + 45y = 438 \Leftrightarrow 3(8x + 15y) = 3 \times 146 \Leftrightarrow 8x + 15y = 146 \quad (E).$$

Ensuite, le couple $(2, -1)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $8x + 15y = 1$. Mais alors, le couple $(x_0, y_0) = (2 \times 146, -1 \times 146) = (292, -146)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $8x + 15y = 146$.

Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$8x + 15y = 146 \Leftrightarrow 8x + 15y = 8x_0 + 15y_0 \Leftrightarrow 8(x - x_0) = 15(y_0 - y).$$

Si (x, y) est solution de l'équation $8x + 15y = 146$, nécessairement l'entier relatif 15 divise l'entier relatif $8(x - x_0)$. Puisque 15 et 8 sont premiers entre eux, l'entier 15 divise $x - x_0$ d'après le théorème de GAUSS. Donc, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 15k$ ou encore tel que $x = x_0 + 15k$.

De même, il existe un entier relatif k' tel que $y_0 - y = 8k'$ ou encore tel que $y = y_0 - 8k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 15k$ et $y = y_0 - 8k'$.

$$\begin{aligned} 8x + 15y = 146 &\Leftrightarrow 8(x_0 + 15k) + 15(y_0 - 8k') = 146 \Leftrightarrow 8x_0 + 15y_0 + 8 \times 15 \times (k - k') = 146 \\ &\Leftrightarrow 8 \times 15 \times (k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'. \end{aligned}$$

Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) : $8x + 15y = 146$ sont les couples de la forme $(292 + 15k, -146, 8k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4) Soient k un entier relatif puis $x = 292 + 15k$.

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 13 &\Leftrightarrow 0 \leq 292 + 15k \leq 13 \Leftrightarrow -292 \leq 15k \leq -279 \Leftrightarrow -\frac{292}{15} \leq 15k \leq -\frac{279}{15} \\ &\Leftrightarrow -19,4\dots \leq k \leq -18,6 \Leftrightarrow k = -19. \end{aligned}$$

Pour $k = -19$, on obtient $x = 292 - 15 \times 19 = 7$ et $y = -146 + 8 \times 19 = 6$. De plus, 7 et 6 sont des entiers naturels.

Le randonneur a passé 7 nuits en hébergement A et 6 nuits en hébergement B.