Antilles Guyane 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (4 points) (commun à tous les candidats)

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$, $B(-1\ ;\ 6\ ;\ 4)$, $C(7\ ;\ -10\ ;\ 8)$ et $D(-1\ ;\ 3\ ;\ 4)$.

Proposition 1 : Les points A, B et C définissent un plan.

On admet que les points A, B et D définissent un plan.

Proposition 2 : Une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - 2z + 9 = 0$.

Proposition 3 : Une représentation paramétrique de la droite (AC) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{3}{2}t - 5 \\ y & = & -3t + 14 \\ z & = & -\dfrac{3}{2}t + 2 \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x - y + 5z + 7 = 0$ et $\mathscr{P}'$ le plan d'équation cartésienne $-3x - y + z + 5 = 0$.

Proposition 4 : Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

Antilles Guyane 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Proposition 1	**FAUX**
Proposition 2	**VRAI**
Proposition 3	**FAUX**
Proposition 4	**FAUX**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points $A(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$, $B(-1\ ;\ 6\ ;\ 4)$, $C(7\ ;\ -10\ ;\ 8)$ et $D(-1\ ;\ 3\ ;\ 4)$.

Justification 1 : Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives les points $(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$, $(-1\ ;\ 6\ ;\ 4)$ et $(7\ ;\ -10\ ;\ 8)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-2, 4, -1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(6, -12, 3)$.
On note alors que $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$. Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ou encore les points A, B et C sont alignés.
On sait alors que les points A, B et C ne définissent pas un unique plan. La proposition 1 est fausse.

Justification 2 : Soit (P) le plan d'équation cartésienne $x - 2z + 9 = 0$.

- $x_A - 2z_A + 9 = 1 - 10 + 9 = 0$. Donc le point A appartient au plan (P).
- $x_B - 2z_B + 9 = -1 - 8 + 9 = 0$. Donc le point B appartient au plan (P).
- $x_D - 2z_D + 9 = -1 - 8 + 9 = 0$. Donc le point D appartient au plan (P).

Les points A, B et D appartiennent au plan (P). Puisque les points A, B et D définissent un unique plan, une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - 2z + 9 = 0$. La proposition 2 est vraie.

Justification 3 : S'il existe un réel t tel que

$$\left\{\begin{array}{l} x_A = \dfrac{3}{2}t - 5 \\ y_A = -3t + 14 \\ z_A = -\dfrac{3}{2}t + 2 \end{array}\right. ,$$

alors en particulier, $-\dfrac{3}{2}t + 2 = 5$ et donc $t = -2$ et aussi $-3t + 14 = 2$ et donc $t = 4$. Ceci est impossible et donc le point A n'appartient pas à la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}t - 5 \\ y = -3t + 14 \\ z = -\dfrac{3}{2}t + 2 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. La proposition 3 est fausse.

Justification 4 : Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(2, -1, 5)$ et un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$ est le vecteur $\overrightarrow{n'}(-3, -1, 1)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles. La proposition 4 est fausse.

