Antilles Guyane 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (6 points) (commun à tous les candidats)

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A

1) Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).

En déduire le signe de $g(x)$.

2) Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3) On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = e^{-x}g(x).$$

4) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

6) a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b) Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

Partie B

1) Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = (-x - 1)e^{-x}.$$

Démontrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = xe^{-x}$.

2) On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

Antilles Guyane 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$g'(x) = -1 + e^x.$$

Pour tout réel x strictement négatif, on a $e^x < 1$ et donc $g'(x) < 0$ et pour tout réel strictement positif x, on a $e^x > 1$ et donc $g'(x) > 0$. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En tenant compte de $g(0) = 1 - 0 + e^0 = 2$, on en déduit le tableau de variations de f.

Tableau de variations de g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	2	$\nearrow$	

En particulier, la fonction g admet un minimum en 0 et ce minimum est égal à 2. Puisque ce minimum est strictement positif, on en déduit que la fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2) Limite de f en $-\infty$. Pour tout réel x, $x + \dfrac{x}{e^x} = x\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) = x\left(e^{-x} + 1\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} + 1 = +\infty$ et d'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{-x} + 1\right) = -\infty$ puis

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel non nul x, $\dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$.

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

3) Pour tout réel x, $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 + 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}\left(e^x + 1 - x\right) = e^{-x}g(x).$$

4) Pour tout réel x, on a $e^{-x} > 0$. D'autre part, d'après la question 1), pour tout réel x, on a $g(x) > 0$. On en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On sait alors que pour tout réel k de $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
En particulier, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

De plus $f(-1) = -e^{-1} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$. Par suite, $f(-1) < f(\alpha) < f(0)$. Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $-1 < \alpha < 0$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

6) a) Une équation de la droite T est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = e^0 g(0) = 2$. Donc, une équation de la droite T est $y = 2x + 1$.

b) La position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T est donnée par le signe de $f(x) - (2x+1)$. Pour tout réel x,

$$f(x) - (2x+1) = x + 1 + \frac{x}{e^x} - (2x+1) = -x + xe^{-x} = x\left(e^{-x} - 1\right).$$

Si $x < 0$, on a $-x > 0$ puis $e^{-x} > 1$ et donc $e^{-x} - 1 > 0$. Mais alors $f(x) - (2x+1) < 0$.
Si $x > 0$, on a $-x < 0$ puis $e^{-x} < 1$ et donc $e^{-x} - 1 < 0$. Mais alors $f(x) - (2x+1) < 0$.

Ainsi, pour tout réel x non nul, $f(x) - (2x+1) < 0$. On en déduit que $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de T sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Enfin, $\mathscr{C}$ et T ont en commun le point de coordonnées $(0, 1)$.

Partie B

1) La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

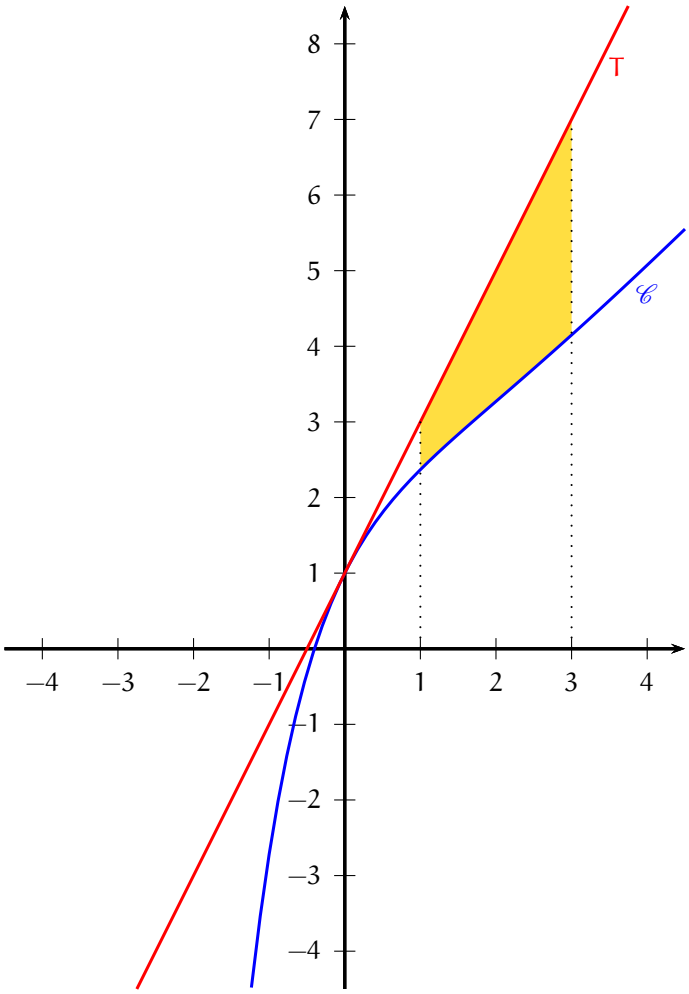
$$H'(x) = (-1)e^{-x} + (-x-1) \times (-1) \times e^{-x} = (-1 + x + 1)e^{-x} = xe^{-x}.$$

Donc la fonction H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.

2) La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de T sur l'intervalle $[1, 3]$. Donc l'aire demandée est

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_1^3 \left((2x+1) - f(x)\right)\, dx = \int_1^3 \left(x - xe^{-x}\right)\, dx = \int_1^3 \left(x - h(x)\right)\, dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - H(x)\right]_1^3 = \left(\frac{3^2}{2} - (-3-1)e^{-3}\right) - \left(\frac{1^2}{2} - (-1-1)e^{-1}\right) \\
&= 4 + 4e^{-3} - 2e^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 4 + 4e^{-3} - 2e^{-1}.}$$



 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.