Antilles Guyane 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Les parties A et B sont indépendantes

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près

Partie A

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.
Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.
Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

1) Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur.
On suppose que toutes les huitres ont la même chance d'être choisies.
On considère les événements suivants :

- J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,
- C : « l'huître prélevée est de calibre n° 3 ».

a) Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

b) Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.

c) Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est $0,695$.

d) Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

2) La masse d'une huître peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

a) Donner la probabilité que l'huître prélevée dans la production de l'ostréiculteur ait une masse comprise entre 87 g et 89 g.

b) Donner $P(X \geqslant 91)$.

Partie B

Cet ostréiculteur affirme que 60 % de ses huîtres ont une masse supérieure à 91 g.
Un restaurateur souhaiterait lui acheter une grande quantité d'huîtres mais il voudrait, auparavant, vérifier l'affirmation de l'ostréiculteur.

Le restaurateur achète auprès de cet ostréiculteur 10 douzaines d'huîtres qu'on considèrera comme un échantillon de 120 huîtres tirées au hasard. Sa production est suffisamment importante pour qu'on l'assimile à un tirage avec remise. Il constate que 65 de ces huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

1) Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 120 huîtres associe la fréquence de celles qui ont une masse supérieure à 91 g.
Après en avoir vérifié les conditions d'application, donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F.

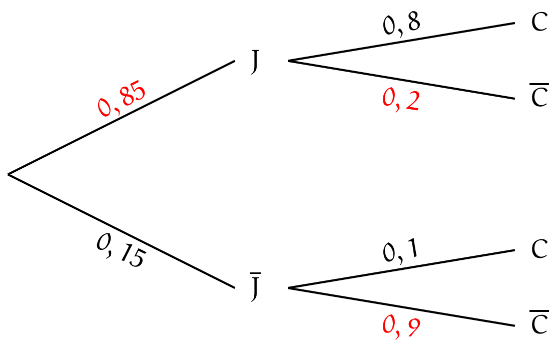
2) Que peut penser le restaurateur de l'affirmation de l'ostréiculteur ?

Antilles Guyane 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) La probabilité demandée est $p\left(\overline{J}\cap C\right)$.

$$p\left(\overline{J}\cap C\right)=p\left(\overline{J}\right)\times p_{\overline{J}}(C)=0,15\times 0,1=0,015.$$

$$\boxed{\text{La probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n}^{\text{o}}\,3\text{ est égale à }0,015.}$$

c) La probabilité demandée est $p(C)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}p(C)&=p(J\cap C)+p\left(\overline{J}\cap C\right)=p(J)\times p_J(C)+p\left(\overline{J}\right)\times p_{\overline{J}}(C)\\&=0,85\times 0,8+0,15\times 0,1=0,695.\end{aligned}$$

$$\boxed{p(C)=0,695.}$$

d) La probabilité demandée est $p_C\left(\overline{J}\right)$.

$$p_C\left(\overline{J}\right)=\frac{p\left(\overline{J}\cap C\right)}{p(C)}=\frac{p\left(\overline{J}\right)\times p_{\overline{J}}(C)}{p(C)}=\frac{0,15\times 0,1}{0,695}=0,0216\text{ arrondi à }10^{-4}.$$

$$\boxed{p_C\left(\overline{J}\right)=0,0216\text{ arrondi à }10^{-4}.}$$

2) a) La probabilité demandée est $P(87\leqslant X\leqslant 89)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(87\leqslant X\leqslant 89)=0,2417\text{ arrondi à }10^{-4}.}$$

b) La calculatrice fournit $P(X\geqslant 91)=1-P(X\leqslant 91)=0,3085$ arrondi à 10^{-4}.

$$\boxed{P(X\geqslant 91)=0,3085\text{ arrondi à }10^{-4}.}$$

Partie B

1) Ici, $n=120$ et on suppose que $p=0,6$. On note tout d'abord que $n\geqslant 30$. Ensuite, $np=72$ et donc $np\geqslant 5$ et $n(1-p)=48$ et donc $n(1-p)\geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F est

$$\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}},p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,6-1,96\frac{\sqrt{0,6\times 0,4}}{\sqrt{120}},p+1,96\frac{\sqrt{0,6\times 0,4}}{\sqrt{120}}\right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu, on obtient l'intervalle $[0,5123;0,6877]$.

2) La fréquence observée est $f=\dfrac{65}{120}=0,54\ldots$ Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation. Donc, le restaurateur peut accepter l'affirmation de l'ostréiculteur mais il ne connaît pas le risque de se tromper.

