Amérique du sud. Novembre 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 3 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Une ville possède un réseau de vélos en libre service dont deux stations A et B se situent en haut d'une colline. On admet qu'aucun vélo des autres stations n'arrive en direction des stations A et B.

On constate pour chaque heure n qu'en moyenne :

- 20 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont toujours à cette station.
  60 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- 10 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station B sont à la station A, 30 % sont toujours à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- Au début de la journée, la station A comporte 50 vélos, la station B 60 vélos.

Partie A

Au bout de n heures, on note a_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et b_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et donc $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer la matrice M telle que $U_{n+1} = M \times U_n$.

2) Déterminer U_1 et U_2.

3) Au bout de combien d'heures reste-t-il un seul vélo dans la station A ?

Partie B

Le service décide d'étudier les effets d'un approvisionnement des stations A et B consistant à apporter après chaque heure de fonctionnement 30 vélos à la station A et 10 vélos à la station B.

Afin de conduire cette étude, il décide de modéliser la situation présente de la manière suivante :
au bout de n heures, on note α_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et β_n le nombre moyen de vélos présents à la station B.
On note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions, $V_{n+1} = M \times V_n + R$ avec $R = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1) On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - M$.

a) On désigne par V une matrice colonne à deux lignes.
Montrer que $V = M \times V + R$ équivaut à $N \times V = R$.

b) On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}$.

En déduire que $V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$.

2) Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = V_n - V$.

a) Montrer que $W_{n+1} = M \times W_n$.

b) On admet que : - pour tout entier naturel n, $W_n = M^n \times W_0$,
- pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $M^n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$

Calculer, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, V_n en fonction de n.

c) Le nombre moyen de vélos présents dans les stations A et B a-t-il tendance à se stabiliser ?

Amérique du sud. Novembre 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) Soit n un entier naturel. A l'heure $n+1$, à la station A, il n'y a plus que 20 % des vélos présents à l'heure n, soit $0,2a_n$, et d'autre part, 10 % des vélos présents à la station B sont maintenant à la station A, soit $0,1b_n$. Au total, $a_{n+1}=0,2a_n+0,1b_n$. De même, $b_{n+1}=0,6a_n+0,3b_n$ et donc

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,2a_n+0,1b_n \\ 0,6a_n+0,3b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=M\times U_n,$$

avec $M=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.

2) $U_1=M\times U_0=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,2\times 50+0,1\times 60 \\ 0,6\times 50+0,3\times 60 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix}$.

$U_2=M\times U_1=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,2\times 16+0,1\times 48 \\ 0,6\times 16+0,3\times 48 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$.

3) $U_3=M\times U_2=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,2\times 8+0,1\times 24 \\ 0,6\times 8+0,3\times 24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

$U_4=M\times U_3=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,2\times 4+0,1\times 12 \\ 0,6\times 4+0,3\times 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$U_5=M\times U_4=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,2\times 2+0,1\times 6 \\ 0,6\times 2+0,3\times 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Au bout de cinq heures, il ne reste plus qu'un vélo dans la station A.

Partie B

1) a) Soit V une matrice colonne à deux lignes.

$$V=M\times V+R\Leftrightarrow V-M\times V=R\Leftrightarrow (I-M)\times V=R\Leftrightarrow N\times V=R.$$

b)

$$NV=R\Rightarrow N^{-1}NV=N^{-1}R\Rightarrow V=\begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}\Rightarrow V=\begin{pmatrix} 42+2 \\ 36+16 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow V=\begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}.$$

2) a) Soit n un entier naturel.

$$W_{n+1}=V_{n+1}-V=(M\times V_n+R)-(M\times V+R)=M\times (V_n-V)=M\times W_n.$$

b) Soit n un entier naturel non nul. $W_0=V_0-V=\begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{aligned} V_n&=W_n+V=M^n\times W_0+V \\ &=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 44+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 52+12\times\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Puisque $-1<\frac{1}{2}<1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=44$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=52$.

Le nombre moyen de vélos présents dans les stations A et B a tendance à se stabiliser : autour de 44 vélos dans la station A et 52 vélos dans la station B.

