Amérique du sud 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte. Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'enlève pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

1) Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(2;5;-1)$, $B(3;2;1)$ et $C(1;3;-2)$. Le triangle ABC est :

a) rectangle et non isocèle

b) isocèle et non rectangle

c) rectangle et isocèle

d) équilatéral

2) Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan P d'équation $2x - y + 3z—1 = 0$ et le point $A(2;5;-1)$. Une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan P et passant par A est :

$$\textbf{a)} \left\{\begin{array}{l} x = 2+2t \\ y = 5+t \\ z = -1+3t \end{array}\right. \quad \textbf{b)} \left\{\begin{array}{l} x = 2+2t \\ y = -1+5t \\ z = 3-t \end{array}\right. \quad \textbf{c)} \left\{\begin{array}{l} x = 6-2t \\ y = 3+t \\ z = 5-3t \end{array}\right. \quad \textbf{d)} \left\{\begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = 4-t \\ z = -2+3t \end{array}\right.$$

3) Soit A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est :

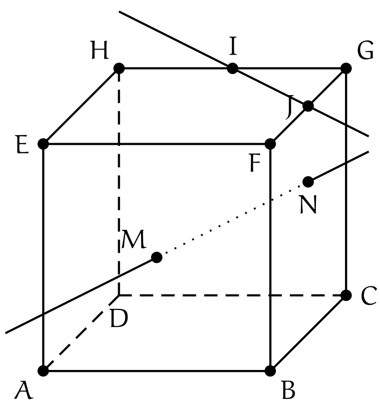
a) l'ensemble vide

b) la médiatrice du segment $[AB]$

c) le cercle de diamètre $[AB]$

d) la droite (AB)

4) La figure ci-dessous représente un cube $ABCDEFGH$. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[GH]$ et $[FG]$. Les points M et N sont les centres respectifs des faces $ABFE$ et $BCGF$.



Les droites (IJ) et (MN) sont :

a) perpendiculaires

b) sécantes, non perpendiculaires

c) orthogonales

d) parallèles

Amérique du sud 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) réponse b)

2) réponse c)

3) réponse c)

4) réponse c)

Explication 1 : Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(1, -3, 2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-1, -2, -1)$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + (-3) \times (-2) + 2 \times (-1) = 3 \neq 0.$$

Donc, les réponses a) et c) sont fausses.

- $AB = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.
- $AC = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \neq \sqrt{14}$.

Donc la réponse d) est fausse. La bonne réponse est la réponse b). Vérifions-le explicitement.

$BC = \sqrt{(1-3)^2 + (3-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} = AB$. Donc le triangle ABC est isocèle en B.

Explication 2 : Un vecteur normal au plan P est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2, -1, 3)$. Les droites des propositions a) et b) sont dirgées respectivement par le vecteur de coordonnées $(2, 1, 3)$ et par le vecteur de coordonnées $(2, 5, -1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires au vecteur $\overrightarrow{n}$. Donc les réponses a) et b) sont fausses.

Quand $t = 2$ dans la représentation paramétrique c), on obtient $(2, 5, -1)$ qui sont les coordonnées du point A. La bonne réponse est la réponse c). Vérifions explicitement que la réponse d) est fausse.

Si le point A appartient à la droite d), il existe un réel t tel que $1 + 2t = 2$ et $4 - t = 5$ ou encore $t = \dfrac{1}{2}$ et $t = -1$ ce qui est impossible. Donc la réponse d) est effectivement fausse.

Explication 3 : On sait que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$. La bonne réponse est la réponse c).

Explication 4 : Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées respectives des points I, J, M et N sont $\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right)$, $\left(1, \dfrac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Les points I et J sont dans le plan d'équation $z = 1$ et les points M et N sont dans le plan d'équation $z = \dfrac{1}{2}$. Ces plans n'ont pas de point commun et donc les droites (IJ) et (MN) n'ont pas de point commun. Les réponses a) et b) sont fausses.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ sont $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les droites (IJ) et (MN) ne sont pas parallèles. La réponse d) est fausse.

Donc la bonne réponse est la réponse c). Vérifions-le explicitement.

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 = 0.$$

Donc les droites (IJ) et (MN) sont effectivement orthogonales.