

Amérique du sud. Novembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de ballons de football. Cette entreprise propose deux tailles de ballons :

- une petite taille,
- une taille standard.

Les trois parties suivantes sont indépendantes.

Partie A

Un ballon de football est conforme à la réglementation s'il respecte, suivant sa taille, deux conditions à la fois (sur sa masse et sur sa circonférence).

En particulier, un ballon de taille standard est conforme à la réglementation lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle $[410; 450]$ et sa circonférence, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[68; 70]$.

1) On note X la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise, associe sa masse en grammes.

On admet que X suit la loi normale d'espérance 430 et d'écart type 10.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $P(410 \leq X \leq 450)$.

2) On note Y la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise associe sa circonférence en centimètres.

On admet que Y suit la loi normale d'espérance 69 et d'écart type σ .

Déterminer la valeur de σ , au centième près, sachant que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, alors $P(-\beta \leq Z \leq \beta) = 0,97$ pour $\beta \approx 2,17$.

Partie B

L'entreprise affirme que 98 % de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation. Un contrôle est alors réalisé sur un échantillon de 250 ballons de taille standard. Il est constaté que 233 d'entre eux sont conformes à la réglementation.

Le résultat de ce contrôle remet-il en question l'affirmation de l'entreprise ? Justifier la réponse.

(On pourra utiliser l'intervalle de fluctuation)

Partie C

L'entreprise produit 40 % de ballons de football de petite taille et 60 % de ballons de taille standard.

On admet que 2 % des ballons de petite taille et 5 % des ballons de taille standard ne sont pas conformes à la réglementation. On choisit un ballon au hasard dans l'entreprise.

On considère les événements :

A : « le ballon de football est de petite taille »,

B : « le ballon de football est de taille standard »,

C : « le ballon de football est conforme à la réglementation » et \bar{C} , l'évènement contraire de C.

1) Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilité.

2) Calculer la probabilité que le ballon de football soit de petite taille et soit conforme à la réglementation.

3) Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,962.

4) Le ballon de football choisi n'est pas conforme à la réglementation. Quelle est la probabilité que ce ballon soit de petite taille ? On arrondira le résultat à 10^{-3} .

Amérique du sud. Novembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) La calculatrice fournit $P(410 \leq X \leq 450) = 0,954$ à 10^{-3} près.

$$P(410 \leq X \leq 450) = 0,954 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

2) Posons $Z = \frac{Y - 69}{\sigma}$. On sait que Z suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

Un ballon est conforme à la législation si et seulement si Y appartient à l'intervalle $[68, 70]$. Or,

$$68 \leq Y \leq 70 \Leftrightarrow -1 \leq Y - 69 \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sigma} \leq \frac{Y - 69}{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma}.$$

L'énoncé dit que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation ou encore $p(68 \leq Y \leq 70) = 0,97$.

$$p(68 \leq Y \leq 70) = 0,97 \Leftrightarrow p\left(-\frac{1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) = 0,97 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma} \approx 2,17 \Leftrightarrow \sigma = 0,46 \text{ au centième près.}$$

$$\sigma = 0,46 \text{ au centième près.}$$

Partie B

Notons F la variable aléatoire égale à la fréquence de ballons conformes à la réglementation.

Ici, $n = 250$ et on suppose que $p = 0,98$. On note tout d'abord que $n \geq 30$. Ensuite, $np = 245$ et donc $np \geq 5$ et $n(1-p) = 5$ et donc $n(1-p) \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F est

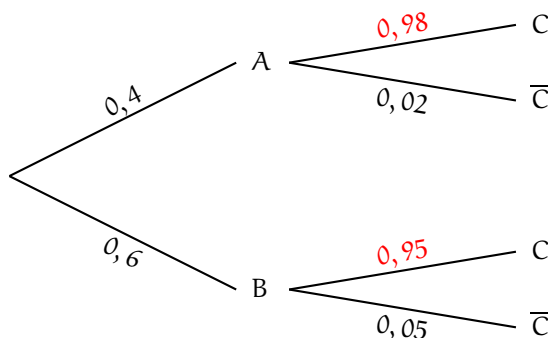
$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,98 - 1,96 \frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}}; 0,98 + 1,96 \frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}} \right].$$

En arrondissant de manière à élargir un peu, on obtient l'intervalle $[0,962; 0,998]$.

La fréquence observée est $f = \frac{233}{250} = 0,932 \dots$ Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation. Donc, le résultat du contrôle remet en question l'affirmation de l'entreprise au risque de se tromper de 5 %.

Partie C

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) La probabilité demandée est $p(A \cap C)$.

$$p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C) = p(A) \times (1 - p_A(\bar{C})) = 0,4 \times (1 - 0,02) = 0,392.$$

$$p(A \cap C) = 0,392.$$

3) La probabilité demandée est $p(C)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(C) &= p(A \cap C) + p(\bar{A} \cap C) = p(A) \times p_A(C) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(C) \\ &= 0,4 \times 0,98 + 0,6 \times 0,95 = 0,962. \end{aligned}$$

$$p(C) = 0,962.$$

4) La probabilité demandée est $p_{\bar{C}}(A)$.

$$p_{\bar{C}}(A) = \frac{p(\bar{C} \cap A)}{p(\bar{C})} = \frac{p(A) \times p_A(\bar{C})}{1 - p(C)} = \frac{0,4 \times 0,02}{1 - 0,962} = 0,211 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$p_{\bar{C}}(A) = 0,211 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$