E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (3 h)

L'objet de ce problème est d'obtenir quelques résultats à propos de l'équation fonctionnelle :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(g(x)).$$

La fonction g, qui est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est ici donnée et on cherche l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ des fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation précédente.
Dans la partie I, on traite le cas où $g(x) = g_{a,b}(x) = a\,x + b$ avec a, b réels. Dans la partie II, on démontre, sous certaines hypothèses, que $\mathcal{E}(g)$ peut se réduire aux fonctions constantes. Enfin, dans la partie III, on traite les cas où $g(x) = x^2$ et où $g(x) = e^x$.

■ Partie I : Les fonctions continues vérifiant $f(x) = f(a\,x + b)$

Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$ distinct de $(1, 0)$, on pose ici : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g_{a,b}(x) = a\,x + b$.
On se propose alors de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}(g_{a,b})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(g_{a,b}(x))$, c'est à dire $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(a\,x + b)$.

1°) *Etude du cas particulier* $|a| = 1$

a) On suppose que $a = 1$ et $b \neq 0$.

- A quelle condition sur le réel ω les fonctions $c : x \longrightarrow \cos(\omega\,x)$ et $s : x \longrightarrow \sin(\omega\,x)$ appartiennent-elles à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{1,b})$?
- Quelles sont les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{1,b})$?

b) On suppose que $a = -1$.

- Préciser quelles sont les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{-1,0})$?
- Etablir l'équivalence des deux relations suivantes pour f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$(1)\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x + b) \qquad ; \qquad (2)\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{b}{2} + x\right) = f\left(\frac{b}{2} - x\right).$$

- En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{-1,b})$.

2°) *Etude du cas* $|a| < 1$

On considère ici la suite de premier terme $x_0 = x$, où x est un réel quelconque donné, et définie ensuite par la relation de récurrence $x_{n+1} = a\,x_n + b$ où le réel a vérifie $|a| < 1$.

a) Montrer que si la suite (x_n) converge vers un nombre réel L, alors on a $L = b/(1 - a)$.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer $x_{n+1} - L$ en fonction de $x_n - L$, puis en déduire :

- l'expression de x_n en fonction de a^n, x et L.
- la convergence et la limite de la suite (x_n).

c) Vérifier, si f appartient à $\mathcal{E}(g_{a,b})$, qu'on a $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En déduire, si $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$ avec $|a| < 1$, qu'on a : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(L)$.

d) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{a,b})$ lorsque $|a| < 1$.

3°) *Etude du cas* $|a| > 1$

a) Etablir (si $a \neq 0$) l'équivalence des deux relations suivantes pour f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$(1) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(a\,x + b) \qquad ; \qquad (2) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right).$$

b) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}\left(g_{a,b}\right)$ lorsque $|a| > 1$.

■ Partie II : Deux cas où les solutions de $f(x) = f(g(x))$ sont constantes

4°) *Etude des points fixes de la fonction g lorsque* $|g'| \leq K < 1$

On suppose ici que la fonction g est de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H})$:
il existe un nombre réel positif $K < 1$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |g'(x)| \leq K$.

a) Etablir, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, qu'on a pour tout réel x :

$$g(0) - K\,|x| \ \leq\ g(x)\ \leq\ g(0) + K\,|x|.$$

b) En déduire les limites de la fonction $x \longrightarrow g(x) - x$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

c) Etudier enfin le sens de variation de la fonction $x \longrightarrow g(x) - x$ et en déduire qu'il existe un unique point fixe de g, c'est à dire un unique nombre réel L tel que $g(L) = L$.

5°) *Etude de l'ensemble* $\mathcal{E}(g)$ *lorsque* $|g'| \leq K < 1$

On garde les hypothèses et les notations de la question précédente (on a donc $g(L) = L$), et on considère la suite de premier terme $x_0 = x$, où $x \in \mathbb{R}$, et définie ensuite par $x_{n+1} = g(x_n)$.

a) Montrer, pour tout entier naturel n, l'inégalité $|x_{n+1} - L| \leq K\,|x_n - L|$.
En déduire que la suite (x_n) converge vers L.

b) Etablir, si f appartient à $\mathcal{E}(g)$, qu'on a $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En déduire, si $f \in \mathcal{E}(g)$, qu'on a : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(L)$.

c) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g)$.

6°) *Recherche de fonctions vérifiant l'hypothèse* $(\mathcal{H})$

Pour obtenir des fonctions g de classe C^1 qui vérifient l'hypothèse $(\mathcal{H})$, on recherche ici les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 dont la dérivée g' est la restriction à l'ensemble $\mathbb{R}$ d'une fonction S développable en série entière sur $\mathbb{C}$ (de rayon de convergence $R = +\infty$), avec $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$, et bornée sur $\mathbb{C}$ par un réel $K < 1$ ($\forall\, z \in \mathbb{C},\ |S(z)| \leq K$).

a) Pour tout entier naturel n et tout nombre réel positif r, montrer la convergence normale de la série de fonctions suivante lorsque sa variable réelle t décrit le segment $[0, 2\pi]$:

$$S\left(r\, e^{i\,t}\right) e^{-i\,n\,t} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, r^k\, e^{(k-n)\,i\,t}.$$

b) Pour tout couple $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\int_0^{2\pi} e^{(k-n)\,i\,t}\, \mathrm{d}t$ en distinguant le cas où $k = n$.

c) Montrer alors, en citant précisément le théorème utilisé et en vérifiant ses hypothèses, qu'on a pour tout entier naturel n et tout nombre réel positif r :

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\,n\,t}\, S\left(r\, e^{i\,t}\right) \mathrm{d}t = 2\,\pi\, a_n\, r^n.$$

d) En déduire, si $|S|$ est bornée par $K < 1$, qu'on a $|a_n| \leq \frac{K}{r^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r > 0$,
puis en faisant tendre r vers $+\infty$, montrer que S est constante, égale à a_0 avec $|a_0| < 1$.
Montrer qu'on retrouve ainsi les fonctions $g_{a,b}$ avec $|a| < 1$ étudiées à la question I.2°.

7°) *Etude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \geq K > 1$*

On suppose ici que la fonction g est de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}')$: il existe un nombre réel $K > 1$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |g'(x)| \geq K$.

a) Montrer que g' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$, et qu'on a nécessairement :
- soit $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) \geq +K$, et g est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de $-\infty$ à $+\infty$.
- soit $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) \leq -K$, et g est alors strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ de $+\infty$ à $-\infty$.

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}, définie et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Exprimer $\left(g^{-1}\right)'(x)$, et montrer que $\left|\left(g^{-1}\right)'(x)\right| \leq \frac{1}{K}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que $f \in \mathcal{E}(g)$ si et seulement si $f \in \mathcal{E}\left(g^{-1}\right)$, et en déduire $\mathcal{E}(g)$ à l'aide de 5°.

■ Partie III : Les fonctions continues vérifiant $f(x) = f\left(x^2\right)$ et $f(x) = f(e^x)$

8°) *Recherche des fonctions continues telles que $f(x) = f\left(x^2\right)$*

On suppose dans cette question que $g(x) = x^2$, de sorte que $\mathcal{E}(g)$ désigne donc l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(x^2\right)$.

On considère la suite de premier terme $x_0 = x$, où x est un réel strictement positif donné, et définie ensuite par la relation de récurrence $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$.

a) Pour tout entier naturel n, vérifier que $x_n = x^{1/2^n}$.
En déduire la convergence de la suite (x_n), et préciser alors sa limite.

b) Etablir, si f appartient à $\mathcal{E}(g)$, qu'on a $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $g(x) = x^2$.
Montrer qu'on a ainsi le même résultat qu'aux questions 5 et 7 sans que les hypothèses $(\mathcal{H})$ ou $(\mathcal{H}')$ ne soient vérifiées : celles-ci sont donc suffisantes, mais pas nécessaires.

9°) *Recherche des fonctions continues telles que $f(x) = f(e^x)$*

Dans cette dernière partie, on cherche des fonctions non constantes f appartenant à $\mathcal{E}(\exp)$, qui est l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(e^x)$.

a) Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$, vérifier que $f(0) = f(1)$.

b) Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$ et si $x < 0$, vérifier que $f(x) = f(e^x)$ où $e^x \in [0, 1]$.

c) On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0$, puis $x_{n+1} = e^{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Etablir que $x_{n+1} \geq x_n + 1$, puis montrer que (x_n) croît strictement vers $+\infty$.
- Etablir que la fonction logarithme induit une bijection de $]\, x_{n+1}, x_{n+2}]$ sur $]\, x_n, x_{n+1}]$.
- Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$, en déduire que : $\forall\, x \in\,]\, x_{n+1}, x_{n+2}],\ f(x) = f(\ln(x))$ où $\ln(x) \in\,]\, x_n, x_{n+1}]$.

d) Etant donnée une fonction continue $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la condition $\varphi(0) = \varphi(1)$, montrer qu'il existe une et une seule fonction $f \in \mathcal{E}(\exp)$ qui coïncide avec φ sur $[0, 1]$.
En déduire l'ensemble $\mathcal{E}(\exp)$.