Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques.

Partie I. Les fonctions continues vérifiant $f(x) = f(ax + b)$

1) *Etude du cas particulier* $|a| = 1$

a) Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Si $\omega = 0$, $c \in \mathcal{E}(g_{1,b})$. Dorénavant, on suppose $\omega \neq 0$.

$$\begin{aligned} c \in \mathcal{E}(g_{1,b}) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\omega x) = \cos(\omega(x+b)) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\omega x) = \cos(\omega x + \omega b) \\ &\Leftrightarrow \forall x' \in \mathbb{R},\ \cos(x') = \cos(x' + \omega b) \text{ (car } \omega \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \omega b \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \omega \in \frac{2\pi}{b}\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En récupérant le cas $\omega = 0$, les réels ω solutions sont les réels de la forme $\dfrac{2k\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$.

De même, les nombres ω tels que $s \in \mathcal{E}(g_{1,b})$ sont les réels de la forme $\dfrac{2k\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les fonctions solutions de $s \in \mathcal{E}(g_{1,b})$ est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et b-périodique.

b) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$.

$$f \in \mathcal{E}(g_{-1,0}) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f \text{ est paire.}$$

Soit f une fonction vérifiant (1). Alors, pour tout réel x,

$$f\left(\frac{b}{2} + x\right) = f\left(-\left(\frac{b}{2} + x\right) + b\right) = f\left(\frac{b}{2} - x\right)$$

et donc f vérifie (2). Réciproquement, soit f une fonction vérifiant (2). Alors, pour tout réel x,

$$f(b - x) = f\left(\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2} - x\right)\right) = f\left(\frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2} - x\right)\right) = f(x)$$

et donc f vérifie (1).

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $h(x) = f\left(x + \dfrac{b}{2}\right)$ de sorte que pour tout réel x, $f(x) = h\left(x - \dfrac{b}{2}\right)$. D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{E}(g_{-1,b}) &\Leftrightarrow f \text{ continue sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow f \text{ vérifie } (1) \\ &\Leftrightarrow f \text{ vérifie } (2) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = h(-x) \Leftrightarrow h \text{ est paire.} \end{aligned}$$

Les solutions de $\mathcal{E}(g_{-1,b})$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $f\ :\ x \mapsto h\left(x - \dfrac{b}{2}\right)$ où h est une fonction paire et continue sur $\mathbb{R}$.

2) *Etude du cas particulier* $|a| < 1$

a) Pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = ax_n + b$ (*). Si la suite (x_n) converge vers un certain réel L, quand n tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient $L = aL + b$ et donc $L = \dfrac{b}{1-a}$ (car $a \neq 1$).

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $x_{n+1} - L = (ax_n + b) - (aL + b) = a(x_n - L)$. La suite $(x_n - L)$ est géométrique de raison a et donc, pour tout entier naturel n, $x_n - L = a^n(x_0 - L)$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = L + a^n(x_0 - L).$$

Puisque $|a| < 1$, la suite (x_n) converge et a pour limite $L = \dfrac{b}{1-a}$.

c) Soit $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = f(ax_n + b) = f(x_{n+1})$.
Ainsi, la suite $(f(x_n))$ est constante et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x_0) = f(x_n)$. Quand n tend vers $+\infty$, par continuité de f sur $\mathbb{R}$ et donc en $L = \dfrac{b}{1-a}$, on obtient

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f(L).$$

d) Ainsi, si $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, les fonctions constantes conviennent.

Si $|a| < 1$, $\mathcal{E}(g_{a,b})$ est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

3) *Etude du cas particulier* $|a| > 1$

a) Si f vérifie (1), alors pour tout réel x,

$$f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) = f\left(a\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) + b\right) = f(x)$$

et donc f vérifie (2). Réciproquement, si f vérifie (2), alors pour tout réel x,

$$f(ax+b) = f\left(\frac{1}{a}(ax+b) - \frac{b}{a}\right) = f(x),$$

et donc f vérifie (1).

b) D'après ce qui précède et la question 2),

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{E}(g_{a,b}) &\Leftrightarrow f \in \mathcal{E}\left(g_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}\right) \\ &\Leftrightarrow f \text{ est constante sur } \mathbb{R} \text{ (car } \left|\frac{1}{a}\right| < 1). \end{aligned}$$

Si $|a| > 1$, $\mathcal{E}(g_{a,b})$ est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

Partie II. Deux cas où les solutions de $f(x) = f(g(x))$ sont constantes

4) *Etude des points fixes de la fonction* g *lorsque* $|g'| \leqslant K < 1$

a) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ et pour tout réel x de I, $|g'(x)| \leqslant K$. D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |g(x) - g(0)| \leqslant K|x - 0| = K|x|.$$

Cette inégalité s'écrit encore pour tout réel x, $-K|x| \leqslant g(x) - g(0) \leqslant K|x|$ ou enfin $g(0) - K|x| \leqslant g(x) \leqslant g(0) + K|x|$.

b) Pour $x \geqslant 0$, on a $g(0) - Kx \leqslant g(x) \leqslant g(0) + Kx$ puis $g(0) - (K+1)x \leqslant g(x) - x \leqslant g(0) + (K-1)x$. En particulier,

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ g(x) - x \leqslant g(0) + (K-1)x \quad (*).$$

Puisque $K < 1$, on a $K - 1 < 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(0) + (K-1)x) = -\infty$. L'inégalité $(*)$ montre alors que

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x) - x) = -\infty.$$

De même, pour $x \leqslant 0$, on a $g(0)+Kx \leqslant g(x) \leqslant g(0)-Kx$ puis $g(0)+(K-1)x \leqslant g(x)-x \leqslant g(0)-(K+1)x$. En particulier,

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ g(x) - x \geqslant g(0) + (K-1)x \quad (**).$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(0) + (K-1)x) = +\infty$ et l'inégalité $(**)$ montre que

$$\lim_{x\to-\infty}(g(x) - x) = +\infty.$$

c) La fonction $h : x \mapsto g(x) - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $h'(x) = g'(x) - 1$. Pour tout réel x,

$$h'(x) \leqslant |g'(x)| - 1 \leqslant K - 1 < 0.$$

Donc, la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction h est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. La fonction h est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $h(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} h(x), \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. En particulier, l'équation $h(x) = 0$ a une solution et une seule sur $\mathbb{R}$ ou encore la fonction g admet un point fixe et un seul L sur $\mathbb{R}$.

5) *Etude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \leqslant K < 1$*

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Toujours d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|x_{n+1} - L| = |g(x_n) - g(L)| \leqslant K\,|x_n - L|.$$

On en déduit par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - L| \leqslant K^n |x_0 - L|$. Puisque $|K| < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} K^n |x_0 - L| = 0$. Donc, la suite (x_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = L$.

b) Soit $f \in \mathcal{E}(g)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_{n+1}) = f(g(x_n)) = f(x_n)$.
Ainsi, le suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x_0) = f(x_n)$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc en L. Quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right) = f(L).$$

c) Donc, si f est dans $\mathcal{E}(g)$, alors f est constante. Réciproquement, les fonctions constantes conviennent et donc $\mathcal{E}(g)$ est l'ensemble des fonctions constantes.

6) *Recherche de fonctions vérifiant l'hypothèse $(\mathcal{H})$*

a) Soient $r \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 2\pi]$, posons $f_n(t) = a_k r^k e^{(k-n)it}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $|f_n(t)| = |a_k| r^k$ puis pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f_k\|_\infty = |a_k| r^k$.
Puisque $R_a = +\infty$, la série numérique de terme général $a_k r^k$, $k \in \mathbb{N}$, est absolument convergente et donc la série numérique de terme général $\|f_k\|_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, est convergente. Mais alors, la série de fonctions de terme général f_k est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$.

b) Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. Si $k = n$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{(k-n)it}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$ et si $k \neq n$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{(k-n)it}\, dt = \left[\frac{e^{(k-n)it}}{i(k-n)}\right]_0^{2\pi} = 0$. En résumé,

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2,\ \int_0^{2\pi} e^{(k-n)it}\, dt = 2\pi\delta_{k,n} \text{ (où } \delta_{k,n} \text{ est le symbole de Kronecker).}$$

c) D'après la question a), la série de fonctions de terme général f_k converge normalement sur le segment $[0, 2\pi]$ et en particulier converge uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$ vers la fonction $t \mapsto S\left(re^{it}\right)e^{-int}$. De plus, chaque fonction f_k est continue sur le segment $[0, 2\pi]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

- la fonction $t \mapsto S\left(re^{it}\right)e^{-int}$ est continue et donc intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$,
- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^{2\pi} f_k(t)\, dt$, $k \in \mathbb{N}$, converge,
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} S\left(re^{it}\right)e^{-int}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_k(t)\, dt$.

Ceci fournit explicitement

$$\int_0^{2\pi} S\left(re^{it}\right)e^{-int}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{(k-n)it}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \delta_{k,n} = 2\pi a_n r^n.$$

d) Soit $r > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} S\left(re^{it}\right)e^{-int}\, dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left|S\left(re^{it}\right)\right|\, dt \leqslant \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} K\, dt = \frac{K}{r^n}.$$

Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $r > 0$, $|a_n| \leqslant \dfrac{K}{r^n}$. Quand r tend vers $+\infty$, on obtient $|a_n| \leqslant 0$ puis $a_n = 0$. Mais alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $S(z) = a_0$. De plus, $|a_0| = LS(0)| \leqslant K < 1$.

En particulier, pour tout réel x, $g(x) = a_0$ ou encore $g = g_{a_0,0}$ avec $|a_0| < 1$. Cette situation a été analysée à la question 2).

7) *Etude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \geqslant K > 1$*

a) Puisque pour tout réel x, $|g'(x)| \geqslant K > 1$, la fonction g' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Si la fonction g' change de signe sur $\mathbb{R}$, puisque la fonction g' est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que la fonction g' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ ce qui est faux. Donc, la fonction g' est de signe constant sur $\mathbb{R}$.

On a donc deux possibilités :

1er cas. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$ et dans ce cas, $g'(x) = |g'(x)| \geqslant K$. La fonction g est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Soit $x > 0$. La fonction g est continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$ et donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in]0, x[$ tel que

$$g(x) - g(0) = g'(c)(x - 0) \geqslant Kx.$$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $g(x) \geqslant g(0) + Kx$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. De même, pour $x < 0$, il existe un réel $c \in]x, 0[$ tel que $g(x) - g(0) = g'(c)(x - 0) \leqslant Kx$ (car $x < 0$) et donc $g(x) \leqslant g(0) + Kx$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

2ème cas. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) < 0$ et dans ce cas, $g'(x) = -|g'(x)| \leqslant -K$. On applique les résultats du premier cas à la fonction $h = -g$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}')$ et vérifie $h' > 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de $-\infty$ à $+\infty$ puis la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ de $+\infty$ à $-\infty$.

b) Dans tous les cas, g est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R})$. De plus, dans les deux cas de la question précédente, $g(\mathbb{R})$ et finalement g est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction g admet donc une réciproque g^{-1}. Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$, g^{-1} est continue sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Puisque g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction g^{-1} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$\left|\left(g^{-1}\right)'(x)\right| = \frac{1}{|g'(g^{-1}(x))|} \leqslant \frac{1}{K}.$$

c) Si f est dans $\mathcal{E}(g)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(g(x))$. Mais alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(g^{-1}(x)\right) = f\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right) = f(x)$ et donc $f \in \mathcal{E}\left(g^{-1}\right)$. Réciproquement, en appliquant à la fonction g^{-1} et en tenant compte du fait que $\left(g^{-1}\right)^{-1} = g$, si f est dans $\mathcal{E}\left(g^{-1}\right)$, alors f est dans $\mathcal{E}(g)$.

En résumé, $\mathcal{E}(g) = \mathcal{E}\left(g^{-1}\right)$. D'après la question précédente, la fonction g^{-1} rentre dans le cas étudié à la question 5) (car $\dfrac{1}{K} < 1$) et donc $\mathcal{E}(g) = \mathcal{E}\left(g^{-1}\right)$ est constitué des fonctions constantes.

Partie III. Les fonctions continues vérifiant $f(x) = f\left(x^2\right)$ et $f(x) = f\left(e^x\right)$

8) *Recherche des fonctions continues telles que* $f(x) = f\left(x^2\right)$

a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = x^{\frac{1}{2^n}}$.

- $x_0 = x = x^{\frac{1}{2^0}}$. L'égalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $x_n = x^{\frac{1}{2^n}}$. Alors, $x_{n+1} = \sqrt{x_n} = \left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2^{n+1}}}$.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = x^{\frac{1}{2^n}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = e^{\frac{\ln(x)}{2^n}}$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = e^0 = 1$.

b) Soit $f \in \mathcal{E}(g)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) = f(\sqrt{x_n}) = f\left((\sqrt{x_n})^2\right) = f(x_n)$.

c) Ainsi, la suite $(f(x_n))$ est constante et puisque f est continue en 1, on a encore une fois $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} x_n\right) = f(1)$. f est donc constante sur $]0, +\infty[$ puis sur $[0, +\infty[$ par continuité de f en 0. Enfin, si $x < 0$, $f(x) = f\left(x^2\right) = f\left((-x)^2\right) = f(-x) = f(1)$ et finalement f est constante sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, les fonctions constantes conviennent. Donc encore une fois, $\mathcal{E}(g)$ est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

Puisque $g'(1) = 2$, la fonction g ne vérifie pas l'hypothèse $(\mathcal{H})$ et puis $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, la fonction g ne vérifie pas l'hypothèse $(\mathcal{H}')$. Ces conditions ne sont pas nécessaires pour affirmer que $\mathcal{E}(g)$ est l'ensemble des fonctions constantes.

9) *Recherche des fonctions continues telles que* $f(x) = f\left(e^x\right)$

a) Soit $f \in \mathcal{E}(g)$. Alors, $f(0) = f\left(e^0\right) = f(1)$.

b) Immédiat.

c) La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde, à savoir elle-même, est positive sur $\mathbb{R}$. Son graphe est donc au-dessus de sa tangente en son point d'abscisse 0. On en déduit l'inégalité de convexité usuelle : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.

Mais alors, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = e^{x_n} \geqslant x_n + 1$. En particulier, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} > x_n$ et donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \geqslant x_n + 1$, par récurrence et en tenant compte de $x_0 = 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant n$. On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]x_{n+1}, x_{n+2}]$ et donc la fonction ln réalise une bijection de $]x_{n+1}, x_{n+2}]$ sur $]\ln(x_{n+1}), \ln(x_{n+2})] =]x_n, x_{n+1}]$.

Soit $f \in \mathcal{E}(\exp)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in]x_{n+1}, x_{n+2}]$, on a déjà $\ln(x) \in]x_n, x_{n+1}]$ puis $f(\ln x) = f\left(e^{\ln(x)}\right) = f(x)$.

d) Soit φ une fonction continue sur $[0, 1]$. Soit f un éventuel élément de $\mathcal{E}(\exp)$ qui coïncide avec φ sur $[0, 1]$.
Nécessairement, si $x \in [0, 1]$, $f(x) = \varphi(x)$ et si $x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = f(e^x) = \varphi(e^x)$. Ensuite, si $x > 1$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_n < x < x_{n+1}$ (puisque la suite (x_n) est strictement croissante de limite $+\infty$ et puisque $x_1 = 1$).
D'après ce qui précède, $f(x) = f(\ln(x)) = f(\ln(\ln(\ldots(\ln(x)))))$ où le logarithme est écrit n fois. Puisque $x \in]x_n, x_{n+1}]$, $\ln(x) \in]x_{n-1}, x_n]$, ..., $\ln(\ln(\ldots(\ln(x)))) \in]x_0, x_1] =]0, 1]$ et donc nécessairement, $f(x) = \varphi(\ln(\ln(\ldots(\ln(x)))))$.

Ce qui précède montre l'unicité de f. Réciproquement, soit f la fonction construite ci-dessus. La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$, sur $[x_0, x_1] = [0, 1]$ et sur chaque intervalle $]x_n, x_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifions maintenant la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, la fonction f est continue sur $]-\infty, x_n]$.

- f est continue sur $]-\infty, 0[=]-\infty, x_0[$ et sur $[0, 1] = [x_0, x_1]$. De plus,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \varphi(e^x) = \lim_{\substack{y \to 1 \\ y < 1}} \varphi(y) = \varphi(1) = \varphi(0) = f(0).$$

  Donc, f est continue à gauche en 0 puis sur $]-\infty, x_1]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que f soit continue sur $]-\infty, x_n]$. f est de plus continue sur $]x_n, x_{n+1}]$. Enfin,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to x_n \\ x > x_n}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to x_n \\ x > x_n}} f(\ln(x)) = \lim_{\substack{y \to x_{n-1} \\ y > x_{n-1}}} f(y) \\
&= f(x_{n-1}) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= f(\ln(x_n)) = f(x_n).
\end{aligned}$$

  et donc, f est continue sur $]-\infty, x_{n+1}]$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est continue sur $]-\infty, x_n]$. Puisque $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-\infty, x_n]$, on a montré que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Vérifions enfin que f est solution de $\mathcal{E}(g)$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, $f(x) = \varphi(e^x) = f(e^x)$ car $e^x \in [0, 1]$. D'autre part, $f(0) = \varphi(0) = \varphi(1) = f\left(e^0\right)$. Donc, pour tout x de $]-\infty, 0]$, $f(x) = f(e^x)$.
Si $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in]x_n, x_{n+1}]$. Mais alors $e^x \in]x_{n+1}, x_{n+2}]$ puis $f(e^x) = f(\ln(e^x)) = f(x)$.

f est donc solution de $\mathcal{E}(g)$ sur $\mathbb{R}$. On a montré que pour toute fonction φ continue sur $[0, 1]$ telle que $\varphi(0) = \varphi(1)$, il existe une solution f de $\mathcal{E}(g)$ et une seule telle que $f_{/[0,1]} = \varphi$.

Ce procédé fournit toutes les solutions de $\mathcal{E}(g)$.

