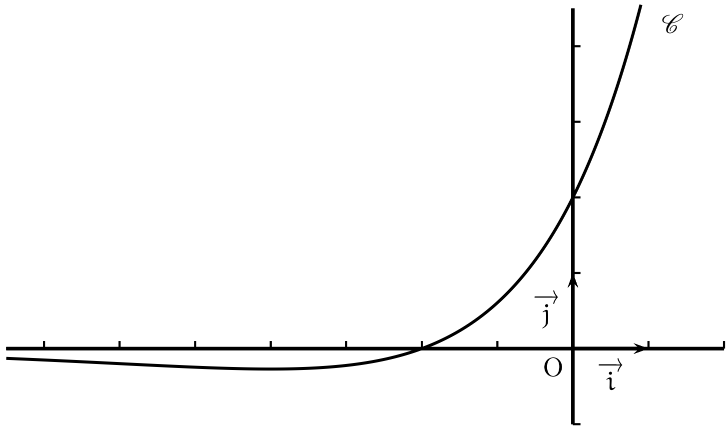
France métropolitaine Septembre 2013. Enseignement spécifique

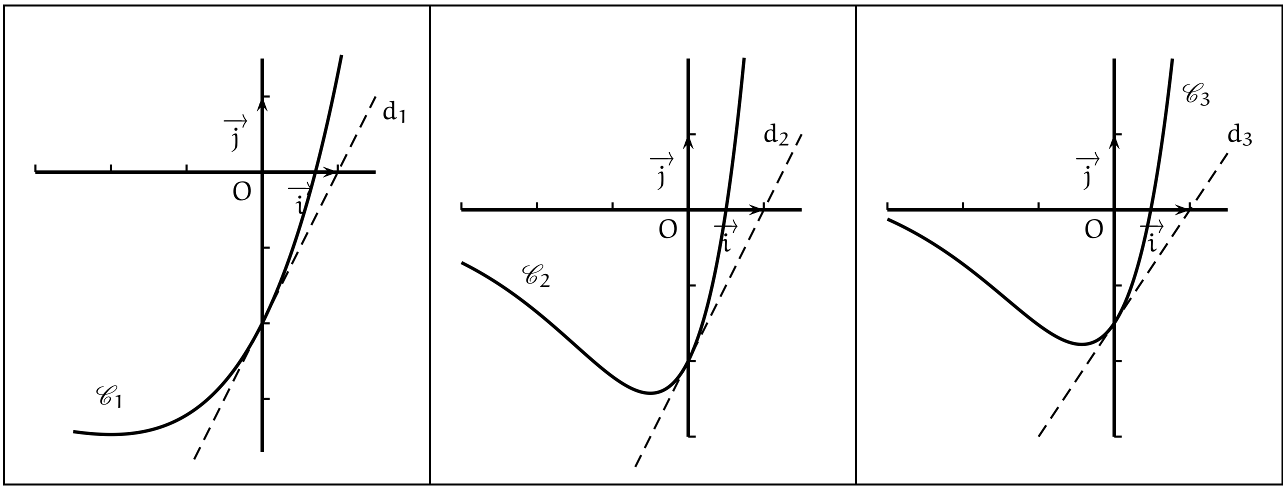
EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ et trois autres courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1) Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

2) On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) A l'aide de la courbe $\mathscr{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.

b) L'une des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F.
Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x}.$$

1) L'observation de la courbe $\mathscr{C}$ permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$.

b) En déduire une validation de la conjecture précédente.

2) On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

a) Interpréter géométriquement le réel I.

b) Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.

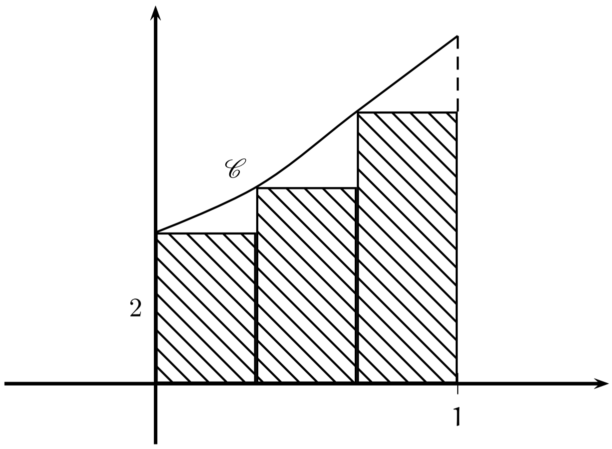
c) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

3) On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$ Affecter à s la valeur $s + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

a) Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



b) Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?