

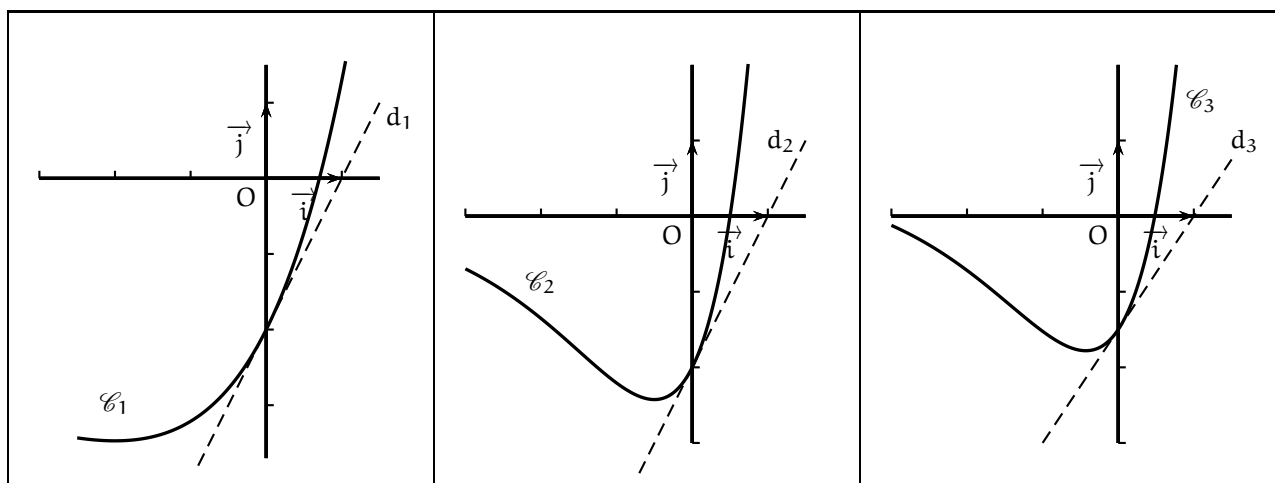
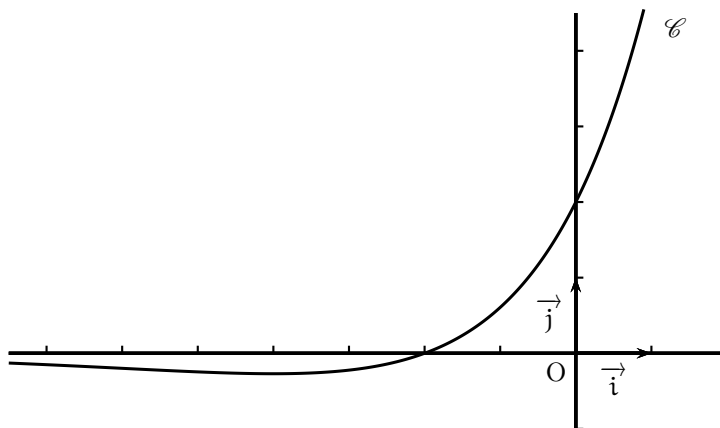
France métropolitaine Septembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe \mathcal{C} et trois autres courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.



- 1) Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
- 2) On désigne par F une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .
 - a) A l'aide de la courbe \mathcal{C} , déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
 - b) L'une des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F . Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{2}x}.$$

- 1) L'observation de la courbe \mathcal{C} permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.
 - a) Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{2}(x + 4)e^{\frac{1}{2}x}$.
 - b) En déduire une validation de la conjecture précédente.
- 2) On pose $I = \int_0^1 f(x) dx$.
 - a) Interpréter géométriquement le réel I .

b) Soient u et v les fonctions définies sur \mathbb{R} par $u(x) = x$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.

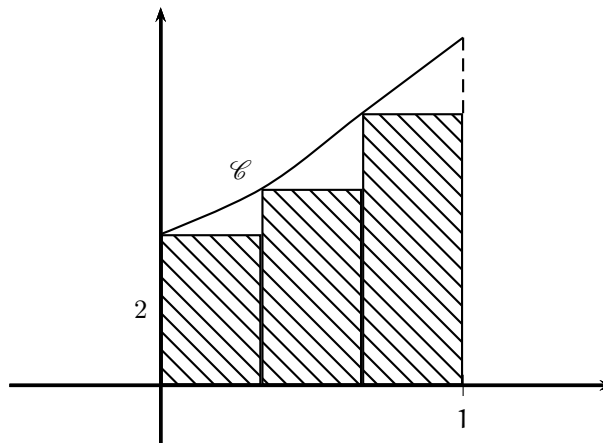
c) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .

3) On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n .
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n - 1$ Affecter à s la valeur $s + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s .

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n .

a) Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



b) Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

France métropolitaine Septembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Sur le graphique, on lit : la fonction f est strictement négative sur $] -\infty, -2[$, strictement positive sur $] -2, +\infty[$ et s'annule en -2 .

2) a) F est une primitive de f sur \mathbb{R} . Donc, F est dérivable sur \mathbb{R} et $F' = f$.
Sur le graphique, on lit : $F'(0) = f(0) = 2$ et $F'(-2) = f(-2) = 0$.

b) Sur la courbe \mathcal{C}_3 , le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est $\frac{3}{2}$ et n'est pas 2 . La courbe \mathcal{C}_3 n'est pas la bonne courbe.

Sur la courbe \mathcal{C}_2 , le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -2 est environ -1 et n'est pas 0 . La courbe \mathcal{C}_2 n'est pas la bonne courbe.

La bonne courbe est la courbe \mathcal{C}_1 .

Partie B

1) a) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$f'(x) = 1 \times e^{\frac{1}{2}x} + (x+2) \times \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \left(1 + \frac{1}{2}(x+2)\right) e^{\frac{1}{2}x} = \frac{x+4}{2} e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\text{Pour tout réel } x, f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}.$$

b) Pour tout réel x , $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} > 0$ et donc, pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de $x+4$. Donc la fonction f' est négative sur $] -\infty, -4[$ et positive sur $[-4, +\infty[$.

Par suite, la fonction f est décroissante sur $] -\infty, -4[$ et croissante sur $[-4, +\infty[$. On en déduit que la fonction f admet un minimum en -4 . Ce minimum est égal à

$$f(-4) = (-4+2)e^{\frac{1}{2} \times (-4)} = -2e^{-2}.$$

$$f \text{ admet un minimum en } -4 \text{ égal à } -2e^{-2}.$$

2) a) La fonction f est continue et positive sur le segment $[0, 1]$. Le nombre I est donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe (Ox) et la courbe \mathcal{C} d'une part, les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$ d'autre part.

b) Pour tout réel x

$$\begin{aligned} 2(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) &= 2\left(1 \times e^{\frac{1}{2}x} + x \times \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\right) = 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) e^{\frac{1}{2}x} \\ &= (x+2)e^{\frac{1}{2}x} = f(x). \end{aligned}$$

c)

$$I = \int_0^1 2(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx = [2u(x)v(x)]_0^1 = 1 \times 2\left(e^{\frac{1}{2}} - 0 \times e^0\right) = 2e^{\frac{1}{2}}.$$

$$I = 2e^{\frac{1}{2}}.$$

3) a) Quand $n=3$, la valeur de s affichée par l'algorithme est

$$s_3 = \frac{1}{3}f(0) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right).$$

Puisque chaque rectangle a la même largeur, la largeur commune de ces rectangles est $\frac{1}{3}$ et donc s_3 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique fourni dans l'énoncé.

b) Quand n devient grand, s_n est une bonne approximation de $\int_0^1 f(x) dx$.