Antilles Guyane. Septembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Les deux parties sont indépendantes

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

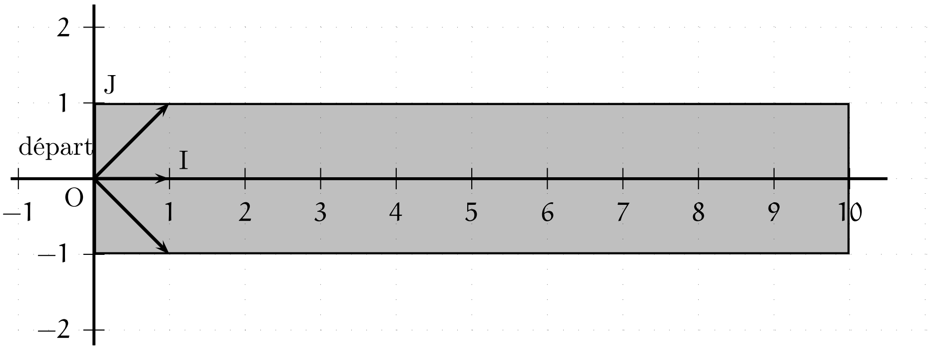
- Soit il avance d'un pas tout droit ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

Partie A : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées $(0 ; 0)$ au début de la traversée. On note $(x ; y)$ les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

```
x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ⩾ −1 et y ⩽ 1 et x ⩽ 9
        Affecter à n une valeur choisie au hasard entre −1, 0 et 1
        Affecter à y la valeur y + n
        Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » (x ; y)
```

1) On donne les couples suivants : $(-1 ; 1)$; $(10 ; 0)$; $(2 ; 4)$; $(10 ; 2)$.
Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.

2) Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est $(x ; y)$ », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 ».
B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».
C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

1) Justifier que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = 0$.

2) Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, on a

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{cases}$$

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3) Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

4) Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.

5) À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul ci-contre qui donne des valeurs approchées de a_n, b_n, c_n pour n compris entre 0 et 10.

Donner une valeur approchée à $0,001$ près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-dessous).

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186
9	0,050 043	0,070 772	0,050 043
10	0,040 272	0,056 953	0,040 272

Antilles Guyane. Septembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A : modélisation et simulation

1) Le couple $(-1, 1)$ ne peut pas être obtenu car x démarre à 0 et progresse de 1 à partir de chaque étape de l'algorithme. x ne peut donc prendre la valeur -1.
Le couple $(10, 0)$ peut être obtenu par exemple si n prend la valeur 0 à chaque étape de l'algorithme.
Le couple $(2, 4)$ ne peut pas être obtenu car pour obtenir $y = 4$, il a fallu d'abord obtenir $y = 3$ et avant $y = 2$. Mais l'algorithme s'arrête si y prend la valeur 2.
Le couple $(10, 2)$ peut être obtenu avec le parcours $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $4, 0)$, $(5, 0)$, $(6, 0)$, $(7, 0)$, $(8, 0)$, $(9, 1)$ et $(10, 2)$.

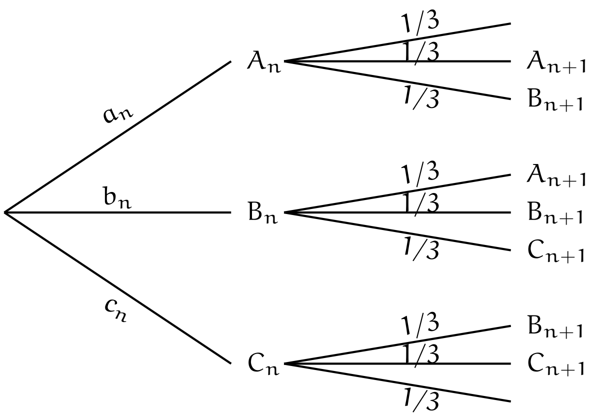
2) Algorithme modifié.

x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que $y \geqslant -1$ et $y \leqslant 1$ et $x \leqslant 9$
    Affecter à n une valeur choisie au hasard entre -1, 0 et 1
    Affecter à y la valeur $y + n$
    Affecter à x la valeur $x + 1$
Fin tant que
Si $x = 10$
    Afficher « Tom a réussi la traversée »
    Sinon afficher « Tom est tombé »
Fin si

Partie B

1) Tom démarre du point de coordonnées $(0, 0)$. Donc, il est sûr qu'après 0 déplacement, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0. Ceci montre que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.

2) Représentons la situation par un arbre pondéré.



D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = p(A_{n+1}) &= p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) = p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n) \times p_{B_n}(A_{n+1}) \\
&= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} = \frac{a_n + b_n}{3}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
b_{n+1} = p(B_{n+1}) &= p(A_n \cap B_{n+1}) + p(B_n \cap B_{n+1}) + p(C_n \cap B_{n+1}) \\
&= p(A_n) \times p_{A_n}(B_{n+1}) + p(B_n) \times p_{B_n}(B_{n+1}) + p(C_n) \times p_{C_n}(B_{n+1}) \\
&= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}.
\end{aligned}$$

3) $p(A_1) = a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{3} = \dfrac{1}{3}$, $p(B_1) = b_1 = \dfrac{a_0 + b_0 + c_0}{3} = \dfrac{1}{3}$ et bien sûr, $p(C_1) = p(A_1) = \dfrac{1}{3}$.

4) Tom est sur le pont au bout de deux déplacements si et seulement si Tom est sur le pont au bout de un déplacement et se trouve sur un point d'ordonnée -1, 0 ou 1 au bout de deux déplacements.
L'événement « Tom est sur le pont au bout de un déplacement » est certain. La probabilité demandée est donc

$$p(A_2 \cup B_2 \cup C_2) = p(A_2) + p(B_2) + p(C_2) = a_2 + b_2 + c_2 = 2a_2 + b_2.$$

$a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{3} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$ et $b_2 = \dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3} = \dfrac{1}{3}$. Donc la probabilité que Tom soit sur le pont au bout de deux déplacements est

$$2 \times \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}.$$

La probabilité que Tom soit sur le pont au bout de deux déplacements est égale à $\dfrac{7}{9}$.

5) De même, la probabilité que Tom traverse le pont est la probabilité que Tom soit sur le pont au bout de dix déplacements. Cette probabilité est

$$a_{10} + b_{10} + c_{10} = 2 \times 0,040\,272 + 0,056\,953 = 0,137\,497.$$

La probabilité que Tom traverse le pont est égale à $0,13$ à 10^{-2} près.

