Antilles Guyane. Septembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

Restitution organisée de connaissances

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et soit P un plan.
On considère deux droites sécantes et contenues dans P : la droite D_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ et la droite D_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.

Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à D_1 et à D_2.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points

$$A(0\ ;\ -1\ ;\ 1),\quad B(4\ ;\ -3\ ;\ 0)\ \text{et}\ C(-1\ ;\ -2\ ;\ -1).$$

On appelle P le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 3t-1 \\ z = -2t+8 \end{array}\right.$ avec t appartenant à $\mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Affirmation 1. Δ est orthogonale à toute droite du plan P.

Affirmation 2. les droites Δ et (AB) sont coplanaires.

Affirmation 3. Le plan P a pour équation cartésienne $x+3y-2z+5=0$.

On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(11\ ;\ -1\ ;\ 4)$.

Affirmation 4.
La droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x+3y-2z+5=0$.

Antilles Guyane. Septembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

Restitution organisée de connaissances

• Si Δ est orthogonale à toute droite du plan P, en particulier Δ est orthogonale aux droites D_1 et à D_2.

• Réciproquement, supposons que Δ soit orthogonale aux droites D_1 et à D_2. Il revient au même de dire que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

Soient D une droite du plan P puis $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de D.

Puisque les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont deux droites sécantes du plan P, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P. Puisque $\overrightarrow{u}$ est un vecteur du plan P, on sait qu'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}.$$

Mais alors

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.\left(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}\right) = \lambda\,\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_1} + \mu\,\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_2} = 0 + 0 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$ ou encore la droite Δ est orthogonale à D.

On a ainsi montré que si Δ est orthogonale à deux droites sécantes du plan P, alors Δ est orthogonale à toute droite du plan P.

Partie B

Affirmation 1	**VRAI**
Affirmation 2	**FAUX**
Affirmation 3	**VRAI**
Affirmation 4	**VRAI**

Justification 1. Un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\overrightarrow{v}(1, 3, -2)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(4, -2, -1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-1, -1, -2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P.

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 4 + 3 \times (-2) + (-2) \times (-1) = 4 - 6 + 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + 3 \times (-1) + (-2) \times (-2) = -1 - 3 + 4 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ou encore la droite Δ est orthogonale aux droites (AB) et (AC). On en déduit que la droite Δ est orthogonale à toute droite du plan P. L'affirmation 1 est vraie.

Justification 2. Puisque la droite Δ est orthogonale à la droite (AB), les droites Δ et (AB) ne sont pas parallèles et donc sont sécantes ou non coplanaires.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\left\{\begin{array}{l} x = 4u \\ y = -1 - 2u \\ z = 1 - u \end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$.

Soient $M(t, 3t - 1, -2t + 8)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ et $N(4u, 1 - 2u, 1 - u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de (AB).

$$M = N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ 3t - 1 = 1 - 2u \\ -2t + 8 = 1 - u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ 3(4u) - 1 = 1 - 2u \\ -2(4u) + 8 = 1 - u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ 14u = 2 \\ 7u = 7 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ u = \dfrac{1}{7} \\ u = 1 \end{array}\right. .$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites Δ et (AB) ne sont pas sécantes. On en déduit que les droites Δ et (AB) ne sont pas coplanaires. L'affirmation 2 est fausse.

Justification 3. Les points A, B et C définissent un unique plan à savoir le plan (ABC).

- $x_A + 3y_A - 2z_A + 5 = 0 - 3 - 2 + 5 = 0$. Donc le point A appartient au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
- $x_B + 3y_B - 2z_B + 5 = 4 - 9 + 0 + 5 = 0$. Donc le point B appartient au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
- $x_C + 3y_C - 2z_C + 5 = -1 - 6 + 2 + 5 = 0$. Donc le point C appartient au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

Ainsi, les points A, B et C appartiennent au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$ et donc le plan (ABC) est le plan d'équation $x + 3y - 2z = 0$. L'affirmation 3 est vraie.

Justification 4. Le plan (ABC) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}(1, 3, -2)$ et la droite Δ admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}(11\ ;\ -1\ ;\ 4)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 11 \times 1 + (-1) \times 3 + 4 \times (-2) = 11 - 3 - 8 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux et donc la droite D est parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$ qui est le plan (ABC). Plus précisément, la droite D est strictement parallèle au plan (ABC) ou incluse dans le plan (ABC). D'autre part,

$$x_O + 3y_O - 2z_0 + 5 = 0 + 0 + 0 + 5 = 0t + 5 = 5.$$

Donc, le point O n'appartient pas au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$ et on en déduit que la droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$. L'affirmation 4 est vraie.

