

# Rochambeau 2013. Enseignement spécifique

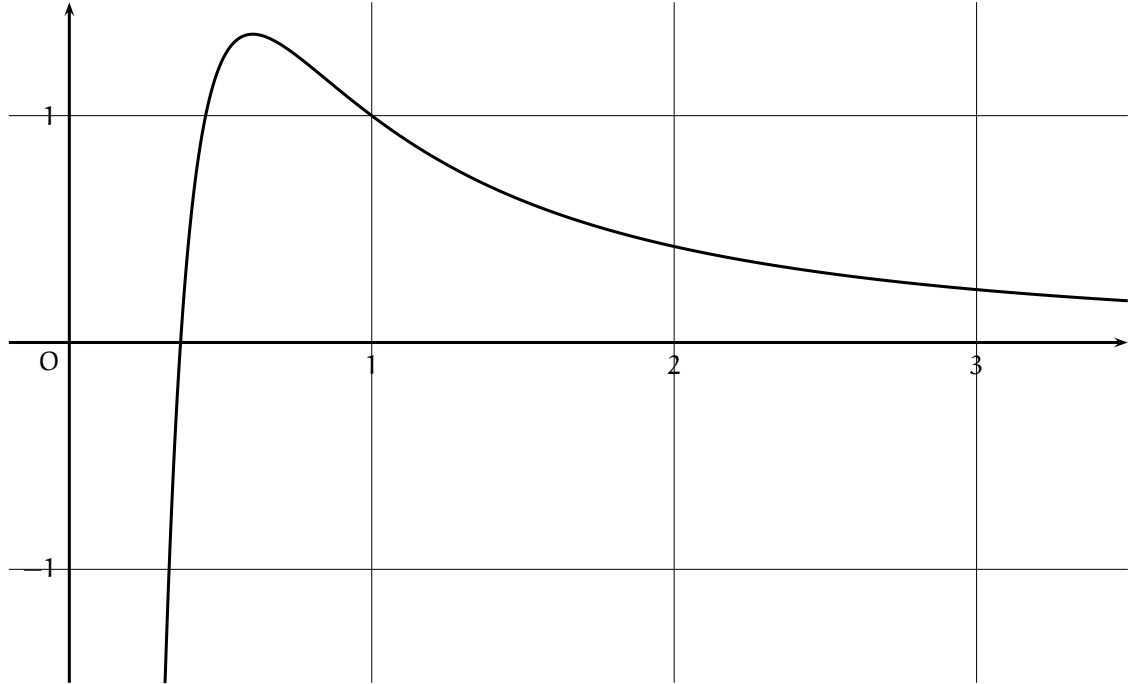
## EXERCICE 4 (5 points) (commun à tous les candidats)

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

et soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère du plan. La courbe  $\mathcal{C}$  est donnée ci-dessous :



1) a) Étudier la limite de  $f$  en  $0$ .

b) Que vaut  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$  ? En déduire la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe  $\mathcal{C}$ .

2) a) On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
Démontrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}.$$

b) Résoudre sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  l'inéquation  $-1 - 2 \ln(x) > 0$ .  
En déduire le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

c) Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$ .

3) a) Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}$  a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b) En déduire le signe de  $f(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

4) Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $I_n$  l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équations respectives  $x = \frac{1}{e}$  et  $x = n$ .

a) Démontrer que  $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$ .

On admet que la fonction  $F$ , définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$ , est une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

b) Calculer  $I_n$  en fonction de  $n$ .

c) Étudier la limite de  $I_n$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.