Rochambeau 2013. Enseignement spécifique

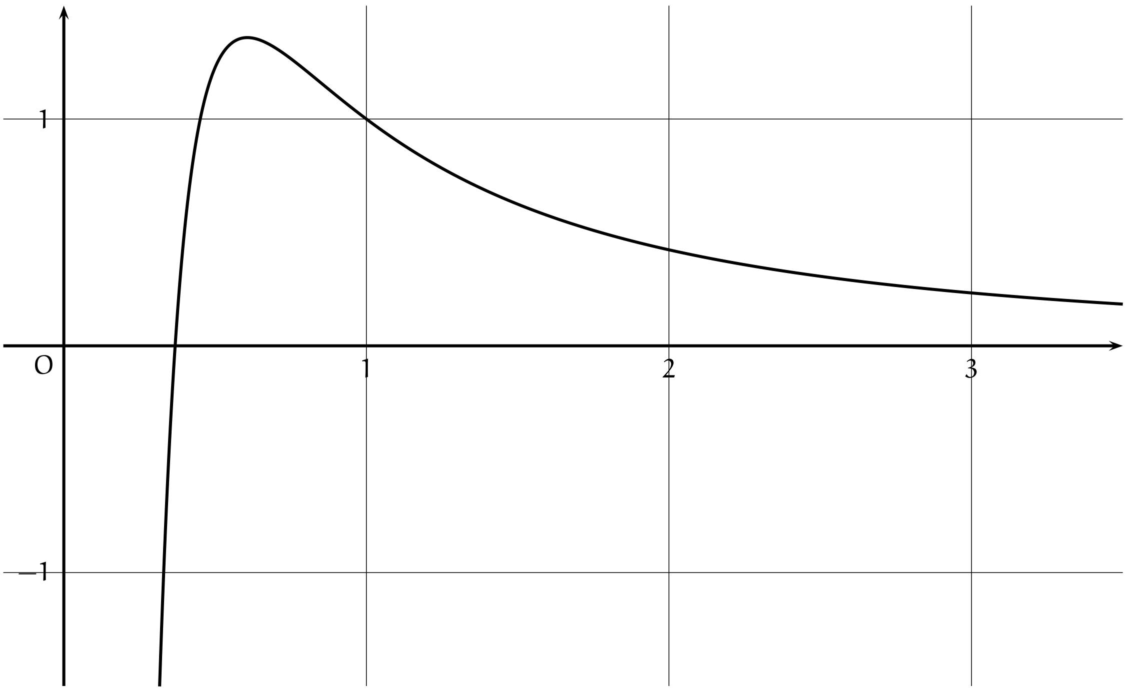
EXERCICE 4 (5 points) (commun à tous les candidats)

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1) a) Étudier la limite de f en 0.

b) Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2) a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

b) Résoudre sur l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3) a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.

a) Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant e - \frac{1}{2}$.

On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) Calculer I_n en fonction de n.

c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Rochambeau 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrige

1) a) Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \times (1 + \ln(x))$. Or, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et d'autre part, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 + \ln(x)) = -\infty$.

En multipliant, on obtient $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^2}(1 + \ln(x)) = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.}$$

b) D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$.
Ensuite, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. En multipliant, on obtient $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x} = 0$.
Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, en additionnant on obtient

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

c) On en déduit que l'axe (Ox) est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

2) a) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$. De plus, pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x^2}\right)'(1 + \ln(x)) + \frac{1}{x^2}(1 + \ln(x))' = -\frac{2}{x^3}(1 + \ln(x)) + \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{-2 - 2\ln(x) + 1}{x^3} = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}.}$$

b) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} -1 - 2\ln(x) > 0 &\Leftrightarrow -2\ln(x) > 1 \Leftrightarrow \ln(x) < -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}} \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}\text{).} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ -1 - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}.}$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $x^3 > 0$ et donc pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-1 - 2\ln(x)$.
D'après ce qui précède, la fonction f' est strictement positive sur $\left]0, e^{-1/2}\right[$, strictement négative sur $\left]e^{-1/2}, +\infty\right[$ et s'annule en $e^{-1/2}$.

c) D'autre part,

$$f\left(e^{-1/2}\right) = \frac{1}{\left(e^{-1/2}\right)^2} \times \left(1 + \ln\left(e^{-1/2}\right)\right) = \frac{1}{e^{-1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}.$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$e/2$	↘	0

3) a) Soit x un réel strictement positif.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}(1 + \ln(x)) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, à savoir le point de coordonnées $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$.

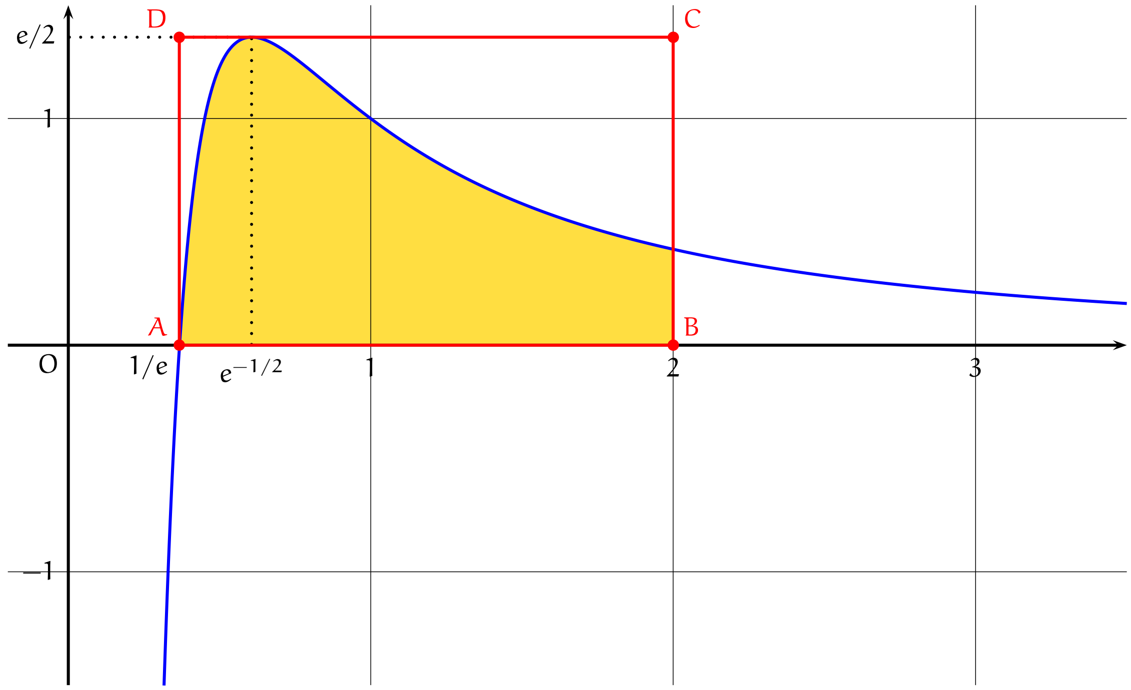
b) Pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{1}{x^2} > 0$. Donc, pour tout réel $x > 0$, $f(x)$ est du signe de $1 + \ln(x)$. D'après la question précédente, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = 0$ équivaut à $x = e^{-1}$. D'autre part, pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Leftrightarrow\Leftrightarrow 1 + \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \\ &\Leftrightarrow x > e^{-1} \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Finalement, la fonction f est strictement négative sur $\left]0, e^{-1}\right[$, strictement positive sur $\left]e^{-1}, +\infty\right[$ et s'annule en e^{-1}.

4) a) La fonction f est continue et positive sur $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Donc $I_2 = \int_{1/e}^{2} f(x)\,dx$.

Notons A, B, C et D les points de coordonnées respectives $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$, $(2, 0)$, $\left(2, \frac{e}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{e}, \frac{e}{2}\right)$.



On a alors

$$0 \leqslant I_2 \leqslant \text{aire de } ABCD = \left(2 - \frac{1}{e}\right) \times \frac{e}{2} = e - \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{0 \leqslant I_2 \leqslant e - \frac{1}{2}.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{1/e}^{n} f(x)\,dx = [F(x)]_{1/e}^{n} = \left(\frac{-2 - \ln(n)}{n}\right) - \left(\frac{-2 - \ln(1/e)}{1/e}\right) = \frac{-2 - \ln(n)}{n} - \left(\frac{-2 + 1}{1/e}\right) \\ &= e - \frac{2 + \ln(n)}{n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ I_n = e - \frac{2 + \ln(n)}{n}.}$$

c) Pour tout entier naturel non nul n, $e - \dfrac{2+\ln(n)}{n} = e - \dfrac{2}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ et d'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = e - 0 - 0 = e$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = e.}$$

e est l'aire du « domaine infini » délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et la droite d'équation $x = \dfrac{1}{e}$.