Rochambeau 2013. Enseignement de Spécialité

EXERCICE 2 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a est un entier naturel b est un entier naturel c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à c la valeur 0 Demander la valeur de a Demander la valeur de b

Traitement :	Tant que $a \geqslant b$
	    Affecter à c la valeur $c+1$
	    Affecter à a la valeur $a-b$
	Fin de Tant que

Sortie :	Afficher c Afficher a

1) Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

2) Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.
Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p.
Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1) Coder la lettre U.

2) Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1) Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \quad [26]$.

2) Démontrer alors l'équivalence :

$$9m + 5 \equiv p \quad [26] \Leftrightarrow m \equiv 3p - 15 \quad [26].$$

3) Décoder alors la lettre B.

Rochambeau 2013. Enseignement de Spécialité

EXERCICE 2

Partie A

1) 1 ère étape. $a = 13$, $b = 4$ et $c = 0$. On a donc $a \geqslant b$.
2ème étape. $a = 9$, $b = 4$ et $c = 1$. On a donc $a \geqslant b$.
3ème étape. $a = 5$, $b = 4$ et $c = 2$. On a donc $a \geqslant b$.
4ème étape. $a = 1$, $b = 4$ et $c = 3$. On a donc $a < b$ et l'algorithme s'arrête.

L'algorithme affiche alors 3 et 1.

2) La valeur finale de c est le « nombre de fois que b rentre dans a » c'est-à-dire le quotient q de la division euclidienne de a par b ou encore la partie entière de $\frac{a}{b}$. La valeur finale de a est la différence entre la valeur initiale de a et qb. La valeur finale de a est donc le reste de la division euclidienne de la valeur initiale de a par b.

$\boxed{\text{L'algorithme calcule le quotient et le reste de la division euclidienne de } a \text{ par } b.}$

Partie B

1) U correspond au nombre $m = 20$. Dans ce cas,

$$9m + 5 = 9 \times 20 + 5 = 185 = 7 \times 26 + 3,$$

avec $0 \leqslant 3 < 26$. Donc $p = 3$. Le nombre 3 correspond à la lettre D.

$\boxed{\text{La lettre U est codée par la lettre D.}}$

2) Algorithme modifié.

Variables :	m est un entier naturel p est un entier naturel c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à c la valeur 0 Demander la valeur de m Affecter à p la valeur de $9*m+5$
Traitement :	Tant que $p \geqslant 26$ Affecter à p la valeur $p-26$ Fin de Tant que
Sortie :	Afficher p

Partie C

1) $9 \times 3 = 27 = 1 \times 26 + 1$. Donc $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$.

$\boxed{x = 3 \text{ convient.}}$

2) Soient m et p deux entiers naturel. Puisque $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$.

$$9m + 5 \equiv p \quad [26] \Rightarrow 3 \times (9m + 5) \equiv 3p \quad [26] \Rightarrow 1 \times m + 15 \equiv 3p \quad [26] \Rightarrow m \equiv 3p - 15 \quad [26].$$

Réciproquement

$$\begin{aligned} m \equiv 3p - 15 \quad [26] &\Rightarrow 9 \times m \equiv 9 \times 3p - 9 \times 15 \quad [26] \Rightarrow 9m \equiv p - 135 \quad [26] \Rightarrow 9m + 5 \equiv p - 130 \quad [26] \\ &\Rightarrow 9m + 5 \equiv p - 5 \times 26 \quad [26] \Rightarrow 9m + 5 \equiv p \quad [26]. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\text{Pour tous entiers naturels } m \text{ et } p,\ m \equiv 3p - 15 \quad [26] \Leftrightarrow 9m + 5 \equiv p \quad [26].}$$

3) La lettre B correspond au nombre $p = 1$. Ce nombre code le nombre m tel que $m \equiv 3 \times 1 - 15 \quad [26]$ ou encore $m \equiv -12 \quad [26]$ ou enfin $m \equiv 14 \quad [26]$ avec $0 \leqslant 14 < 26$. Le nombre 14 correspond à la lettre O et donc

$$\boxed{\text{la lettre B code la lettre O.}}$$

