

Pondichéry 2013. Enseignement de spécialité

EXERCICE 3 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux. Pour tout entier naturel n , on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation. Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes. Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.

On admet que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{cases} j_{n+1} = 0,125j_n + 0,525a_n \\ a_{n+1} = 0,625j_n + 0,625a_n \end{cases} .$$

On introduit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \text{ et, pour tout entier naturel } n, U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} .$$

- 1) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = A \times U_n$.
b) Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).
c) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de A^n et de U_0 .
- 2) On introduit les matrices suivantes $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) On admet que la matrice Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix}$.
Montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$.
b) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.
c) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n .
- 3) On admet que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 + 0,3 \times (-0,25)^n \end{pmatrix}$$

- a) En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.
- b) Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?

Pondichéry 2013. Enseignement de spécialité

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) Soit n un entier naturel.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125j_n + 0,525a_n \\ 0,625j_n + 0,625a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = A \times U_n.$$

Pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = A \times U_n$.

b)

$$\begin{cases} j_1 = 0,125j_0 + 0,525a_0 = 0,125 \times 200 + 0,525 \times 500 = 25 + 262,5 = 287,5 \\ a_1 = 0,625j_0 + 0,625a_0 = 0,625 \times 200 + 0,625 \times 500 = 125 + 312,5 = 437,5 \end{cases}.$$

Il y a donc 287 animaux jeunes et 437 animaux adultes après un an d'observation.

$$\begin{cases} j_2 = 0,125j_1 + 0,525a_1 = 0,125 \times 287,5 + 0,525 \times 437,5 = 35,9375 + 229,6875 = 265,625 \\ a_2 = 0,625j_1 + 0,625a_1 = 0,625 \times 287,5 + 0,625 \times 437,5 = 179,6875 + 273,4375 = 453,125 \end{cases}.$$

Il y a donc 265 animaux jeunes et 453 animaux adultes après deux ans d'observation.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, exprimer $U_n = A^n \times U_0$.

- Pour $n = 1$, $U_1 = A \times U_0 = A^1 \times U_0$ d'après la question 1)a). La formule proposée est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $U_n = A^n \times U_0$ et montrons que $U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= A \times U_n \text{ (d'après la question 1)a)} \\ &= A \times A^n \times U_0 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= A^{n+1} \times U_0. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel non nul n , $U_n = A^n \times U_0$.

2) a)

$$\begin{aligned} Q \times D \times Q^{-1} &= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \times (-0,25) & 3 \times 1 \\ -5 \times (-0,25) & 5 \times 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,75 & 3 \\ 1,25 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1,75 \times 0,1 + 3 \times 0,1 & (-1,75) \times (-0,06) + 3 \times 0,14 \\ 1,25 \times 0,1 + 5 \times 0,1 & 1,25 \times (-0,06) + 5 \times 0,14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \\ &= A. \end{aligned}$$

Donc,

$Q \times D \times Q^{-1} = A$.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

- Pour $n = 1$, $Q \times D^1 \times Q^{-1} = Q \times D \times Q^{-1} = A$ d'après la question 2)a). La formule proposée est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = Q \times D^{n+1} \times Q^{-1}$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= Q \times D \times Q^{-1} \times Q \times D^n \times Q^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= Q \times D \times I \times D^n \times Q^{-1} = Q \times D \times D^n \times Q^{-1} \\ &= Q \times D^{n+1} \times Q^{-1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel non nul n , $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $D^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Pour $n = 1$, $D^1 = D = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-0,25)^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La formule proposée est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $D^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et montrons que $D^{n+1} = \begin{pmatrix} (-0,25)^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} D^{n+1} &= D \times D^n \\ &= \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \begin{pmatrix} (-0,25)^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel non nul n , $D^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) a) Soit n un entier naturel non nul. D'après la question 1)b),

$$\begin{aligned} u_n &= A^n \times u_0 = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 + 0,3 \times (-0,25)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 200(0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n) + 500(0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n) \\ 200(0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n) + 500(0,7 + 0,3 \times (-0,25)^n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 270 - 70 \times (-0,25)^n \\ 450 + 50 \times (-0,25)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , $j_n = 270 - 70 \times (-0,25)^n$ et $a_n = 450 + 50 \times (-0,25)^n$.

Puisque $-1 < -0,25 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,25)^n = 0$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} j_n = 270 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 450.$$

b) Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années d'observation, le nombre d'animaux jeunes est environ 270 et le nombre d'animaux adultes est environ 450. Le nombre total d'animaux est quant à lui passé de 700 à environ 720.