Polynésie 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Les 3 parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.
L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30% de musique classique, 45% de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- Les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- Les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considérera les événements suivants :

C : « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;
V : « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;
J : « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;
H : « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;
S : « Le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Partie 1

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1) Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?

2) On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.

a) Les événements C et H sont-ils indépendants ?
b) Calculer $P(J \cap H)$ et $P_J(H)$.

Partie 2

Pendant un long trajet en train, Thomas écoute, en utilisant la fonction « lecture aléatoire » de son MP3, 60 morceaux de musique.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de morceaux de musique classique dans un échantillon de taille 60.

2) Thomas a comptabilisé qu'il avait écouté 12 morceaux de musique classique pendant son voyage.
Peut-on penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas est défectueuse ?

Partie 3

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque chanson stockée sur le lecteur MP3, associe sa durée exprimée en secondes et on établit que X suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

On pourra utiliser le tableau fourni en annexe dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

On écoute un morceau musical au hasard.

1) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(180 \leqslant X \leqslant 220)$.

2) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité que le morceau écouté dure plus de 4 minutes.

ANNEXE de l'exercice 3

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

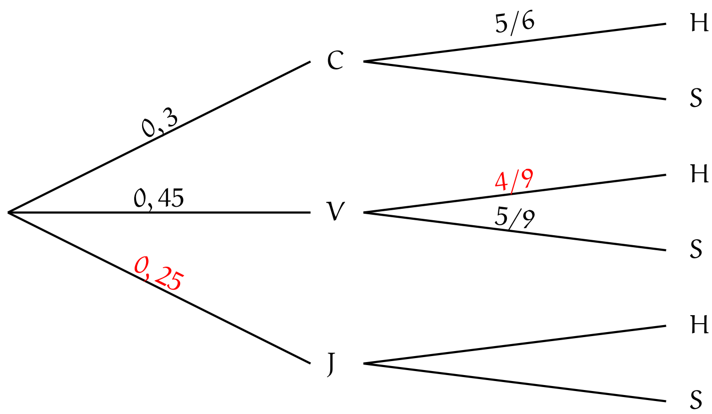
b	$P(X \leqslant b)$
140	0,001
150	0,006
160	0,023
170	0,067
180	0,159
190	0,309
200	0,500
210	0,691
220	0,841
230	0,933
240	0,977
250	0,994
260	0,999

Polynésie 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie 1

1) Représentons la situation par un arbre.



La probabilité demandée est $p(C \cap H)$. L'énoncé donne $p_C(H) = \frac{5}{6}$ et $p(C) = \frac{3}{10}$. Donc,

$$p(C \cap H) = p(C) \times p_C(H) = \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{2 \times 5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{4}.$$

$$\boxed{p(C \cap H) = \frac{1}{4} = 0,25.}$$

2) a) $p(H) = \frac{13}{20} = 0,65$ et $p_C(H) = \frac{5}{6} = 0,8\ldots$. Ainsi, $p_C(H) \neq p(H)$ et donc

$$\boxed{\text{les événements } C \text{ et } H \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

b) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(H) = p(C \cap H) + p(V \cap H) + p(J \cap H).$$

On sait déjà que $p(H) = \frac{13}{20}$ et que $p(C \cap H) = \frac{1}{4}$. Ensuite,

$$p(V \cap H) = p(V) \times p_V(H) = \frac{45}{100} \times \left(1 - \frac{5}{9}\right) = \frac{45}{100} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{5}.$$

On en déduit que

$$p(J \cap H) = p(H) - p(C \cap H) - p(V \cap H) = \frac{13}{20} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{13 - 5 - 4}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

$$\boxed{p(J \cap H) = \frac{1}{5} = 0,2.}$$

Enfin,

$$P_J(H) = \frac{p(J \cap H)}{p(J)} = \frac{1/5}{1/4} = \frac{4}{5}.$$

$$\boxed{P_J(H) = \frac{4}{5} = 0,8.}$$

Partie 2

1) Ici, $n = 60$ et $p = 0,3$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 18$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) = 42$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de morceaux de musique classique est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,3 - 1,96\frac{\sqrt{0,3 \times 0,7}}{\sqrt{60}}, 0,3 + 1,96\frac{\sqrt{0,3 \times 0,7}}{\sqrt{60}}\right].$$

En arrondissant au millième de manière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,184; 0,416]$.

2) La fréquence observée de morceaux de musique classique est $\frac{12}{60} = 0,2$. Cette fréquence appartient à l'intervalle précédent. Donc, on peut accepter l'hypothèse que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas n'est pas défectueuse mais on ne connaît pas le risque de se tromper.

Partie 3

1) $P(180 \leqslant X \leqslant 220) = P(X \leqslant 220) - P(X \leqslant 180) = 0,841 - 0,159 = 0,682$.

$$\boxed{P(180 \leqslant X \leqslant 220) = 0,682 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

2) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 240)$. Or,

$$p(X \geqslant 240) = 1 - p(X \leqslant 240) = 1 - 0,977 = 0,023$$

$$\boxed{P(X \geqslant 240) = 0,023 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

