Nouvelle Calédonie. Novembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}.$$

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x^2e^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g.

b) Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Démontrer que α appartient à l'intervalle $[0,703\ ;\ 0,704[$.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Étude de la fonction f

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$.

e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

Nouvelle Calédonie. Novembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a) La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x

$$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x + 0 = x(x+2)e^x.$$

La fonction g' est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0. Donc, la fonction g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $\left[g(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[= [-1, +\infty[$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. En particulier, puisque $0 \in [-1, +\infty[$, il existe un réel positif a et un seul tel que $g(a) = 0$.

La calculatrice fournit $g(0,703) = -0,001\ldots < 0$ et $g(0,704) = 0,002\ldots > 0$. Donc $g(0,703) < g(a) < g(0,704)$. Puisque la fonction g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que

$$\boxed{0,703 < a < 0,704.}$$

c) Soit x un réel positif. Puisque la fonction g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, si $x < a$, alors $g(x) < g(a)$ ou encore $g(x) < 0$ et si $x > a$, alors $g(x) > g(a)$ ou encore $g(x) > 0$.

Ainsi, la fonction g est strictement négative sur $[0, a[$, strictement positive sur $]a, +\infty[$ et s'annule en a.

2. Étude de la fonction f

a) Limite en 0. $\lim\limits_{x\to0,\ x>0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0,\ x>0} e^x = 1$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to0,\ x>0} f(x) = +\infty.}$$

Limite en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

b) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel strictement positif x,

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2e^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

c) Le signe de la fonction g a été étudié en 1). On en déduit le tableau de variation de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

x	0		a		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$f(a)$	↗	$+\infty$

d) Puisque $g(a) = 0$, on a $a^2e^a - 1 = 0$ puis $a^2e^a = 1$ et enfin, puisque $a \neq 0$, $e^a = \dfrac{1}{a^2}$.

La fonction f admet un minimum en a. Ce minimum est

$$m = f(a) = e^a + \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}.$$

e) On a $0,703 < a < 0,704$. Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$, on en déduit que

$$0,703^2 < a^2 < 0,704.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

Par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{0,704^2} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{0,703^2} \text{ et } \frac{1}{0,704} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0,703}.$$

En additionnant membre à membre, on obtient

$$\frac{1}{0,704^2} + \frac{1}{0,704} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} < \frac{1}{0,703^2} + \frac{1}{0,703}$$

La calculatrice fournit $\dfrac{1}{0,704^2} + \dfrac{1}{0,704} = 3,438\ldots$ et en particulier, $\dfrac{1}{0,704^2} + \dfrac{1}{0,704} > 3,43$.
On a aussi $\dfrac{1}{0,703^2} + \dfrac{1}{0,703} = 3,445\ldots$ et en particulier $\dfrac{1}{0,703^2} + \dfrac{1}{0,703} < 3,45$. On a montré que

$$\boxed{3,43 < m < 3,45.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.