Liban 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) Limite en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+e^{-x}\right) = +\infty$.

En prenant l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^{-x}} = 0$.

Limite en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+e^{-x}\right) = 1$.

En prenant l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{1} = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 1.}$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}_1$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_1$ en $+\infty$.

2) Soit x un réel. On sait que $e^x \neq 0$ et que $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ puis

$$f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{e^x}} = \frac{1}{\left(\dfrac{e^x+1}{e^x}\right)} = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f_1(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.}$$

3) La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f_1'(x) = \frac{e^x \times (e^x+1) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f_1'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.}$$

Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $(1+e^x)^2 > 0$. Donc pour tout réel x, $f_1'(x) > 0$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f_1 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

4) D'après la question 2), pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.
Posons pour tout réel x, $u(x) = 1+e^x$. Alors, la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = e^x$ puis

$$f_1(x) = \frac{u'(x)}{u(x)},$$

la fonction u étant strictement positive sur $\mathbb{R}$. On sait qu'une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ est la fonction F_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $F_1(x) = \ln(u(x)) = \ln\left(1+e^x\right)$. On en déduit que

$$I = \int_0^1 f_1(x)\ dx = [F_1(x)]_0^1 = \ln\left(1+e^1\right) - \ln\left(1+e^0\right) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

$$\boxed{I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).}$$

La fonction f_1 est continue et positive sur le segment $[0,1]$. On sait alors que I est l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine du plan compris entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_1$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

Partie B

Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment $[MP]$.

1) Soit x un réel. D'après la question 2) de la partie A, $f_1(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. Donc,

$$f_1(x) + f_{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x+1}{1+e^x} = 1.$$

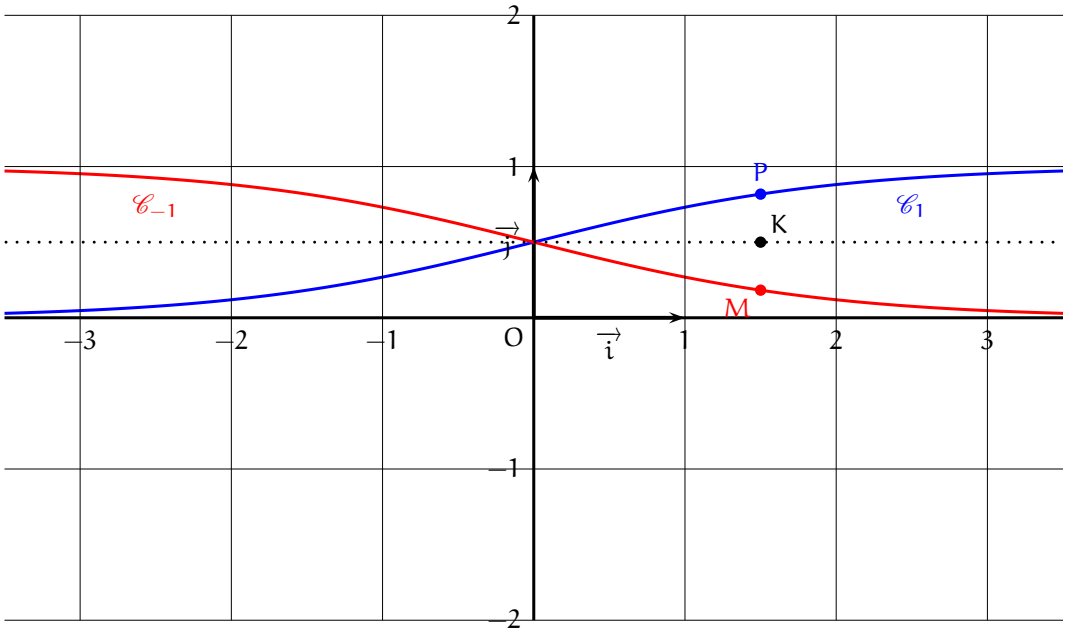
$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f_1(x) + f_{-1}(x) = 1.}$$

2) Les points M et P ont la même abscisse x. Donc $x_K = x$. D'autre part

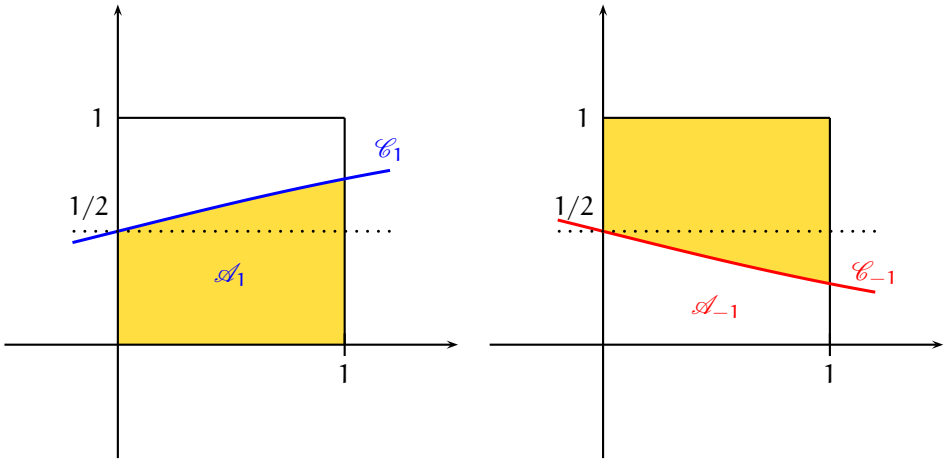
$$y_K = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

3) La courbe $\mathscr{C}_{-1}$ se déduit donc de la courbe $\mathscr{C}_1$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.



4) Notons $\mathscr{A}_1$ (resp. $\mathscr{A}_{-1}$) l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_1$ (respectivement $\mathscr{C}_{-1}$).



Pour des raisons de symétrie, les deux aires en jaune sont égales et donc, l'aire du carré unité étant égale à 1, on a $\mathscr{A}_{-1} = 1 - \mathscr{A}_1$. L'aire $\mathscr{A}$ demandée est alors :

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_{-1} = \mathscr{A}_1 - (1 - \mathscr{A}_1) = 2\mathscr{A}_1 - 1 = 2\ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - 1.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

$$\boxed{\text{L'aire demandée, exprimée en unités d'aire, est égale à } 2\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)-1.}$$

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1) Soit k un réel. Pour tout réel x, $e^{-kx} > 0$ et donc $\dfrac{1}{1+e^{-kx}} > 0$ ou encore $f_k(x) > 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned} e^{-kx} > 0 &\Rightarrow 1+e^{-kx} > 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+e^{-kx}} < 1 \text{ (par stricte décroissance de la fonction } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Rightarrow f_k(x) < 1. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel k et pour tout réel x, $0 < f_k(x) < 1$. Il revient au même de dire que pour tout réel k, la courbe $\mathscr{C}_k$ est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

$$\boxed{\text{L'affirmation 1) est VRAIE.}}$$

2) La fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'après la partie A. Grâce à la symétrie obtenue en partie B, la fonction f_{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, il existe un réel k pour lequel la fonction f_k n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{L'affirmation 2) est FAUSSE.}}$$

3) Soit k un réel.

$$\begin{aligned} k \geqslant 10 &\Leftrightarrow -\frac{k}{2} \leqslant -\frac{10}{2} \Leftrightarrow -\frac{k}{2} \leqslant -5 \\ &\Leftrightarrow e^{-\frac{k}{2}} \leqslant e^{-5} \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow 1+e^{-\frac{k}{2}} \leqslant 1+e^{-5} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-\frac{k}{2}}} \geqslant \frac{1}{1+e^{-5}} \text{ (par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 0,993\ldots \\ &\Rightarrow f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 0,99 \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.

$$\boxed{\text{L'affirmation 3) est VRAIE.}}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.