Liban 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (commun à tous les candidats)

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre $0,16$ et $0,18$. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70% des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30% de la chaîne F_2.
La chaîne F_1 produit 5% de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1%.

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les événements :

E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2. »
C : « Le petit pot est conforme. »

1) Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

2) Calculer la probabilité de l'événement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »

3) Déterminer la probabilité de l'événement C.

4) Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement E sachant que l'événement C est réalisé.

Partie B

1) On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.
On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.
Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
$0,13$	$0,15$	$0,0004$
$0,14$	$0,16$	$0,0478$
$0,15$	$0,17$	$0,4996$
$0,16$	$0,18$	$0,9044$
$0,17$	$0,19$	$0,4996$
$0,18$	$0,20$	$0,0478$
$0,19$	$0,21$	$0,0004$

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2) On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.
On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.
On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à $0,99$.
Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

a) Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?
b) Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle $[0,16; 0,18]$.
c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.
On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

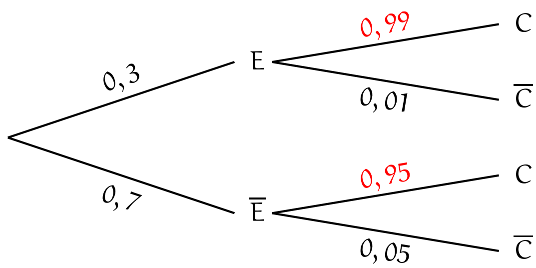
β	$P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta)$
$2,4324$	$0,985$
$2,4573$	$0,986$
$2,4838$	$0,987$
$2,5121$	$0,988$
$2,5427$	$0,989$
$2,5758$	$0,990$
$2,6121$	$0,991$
$2,6521$	$0,992$
$2,6968$	$0,993$

Liban 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre.



2) La probabilité demandée est $p\left(\overline{E}\cap C\right)$.

$$p\left(\overline{E}\cap C\right) = p\left(\overline{E}\right)\times p_{\overline{E}}(C) = p\left(\overline{E}\right)\times\left(1-p_{\overline{E}}\left(\overline{C}\right)\right) = 0,7\times(1-0,05) = 0,7\times 0,95 = 0,665.$$

$$\boxed{p\left(\overline{E}\cap C\right) = 0,665.}$$

3) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(C) = p\left(E\cap C\right) + p\left(\overline{E}\cap C\right) = p(E)\times p_E(C) + p\left(\overline{E}\right)\times p_{\overline{E}}(C).$$

On connaît déjà $p\left(\overline{E}\cap C\right) = 0,665$. D'autre part,

$$p\left(E\cap C\right) = p(E)\times p_E(C) = p(E)\times\left(1-p_E\left(\overline{C}\right)\right) = 0,3\times(1-0,01) = 0,3\times 0,99 = 0,297.$$

Finalement,

$$p(C) = 0,665 + 0,297 = 0,962.$$

$$\boxed{p\left(C\right) = 0,962.}$$

4) La probabilité demandée est $p_C(E)$.

$$p_C(E) = \frac{p\left(C\cap E\right)}{p(C)} = \frac{p(E)\times p_E(C)}{p(C)} = \frac{0,3\times 0,99}{0,962} = \frac{0,297}{0,962} = 0,308 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$$\boxed{p_C\left(E\right) = 0,308 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

Partie B

1) On rappelle qu'un pot est conforme si et seulement si la proportion de sucre dans la compote est comprise entre $0,16$ et $0,18$. La probabilité demandée est donc $P\left(0,16 \leqslant X \leqslant 0,18\right)$. On lit dans le tableau

$$\boxed{\text{la probabilité qu'un petit pot issu de la chaîne } F_1 \text{ soit conforme est } 0,9044 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}}$$

2) a) Z suit la loi normale centrée réduite.

b)

$$0,16 \leqslant Y \leqslant 0,18 \Leftrightarrow 0,16 - m_2 \leqslant Y - m_2 \leqslant 0,18 - m_2 \Leftrightarrow \frac{0,16-m_2}{\sigma_2} \leqslant \frac{Y-m_2}{\sigma_2} \leqslant \frac{0,18-m_2}{\sigma_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,16-0,17}{\sigma_2} \leqslant Z \leqslant \frac{0,18-0,17}{\sigma_2} \Leftrightarrow -\frac{0,01}{\sigma_2} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sigma_2}$$

Y appartient à l'intervalle $[0,16;0,18]$ si et seulement si Z appartient à l'intervalle $\left[-\frac{0,01}{\sigma_2}, \frac{0,01}{\sigma_2}\right]$.

c) L'énoncé donne $P\left(-\dfrac{0,01}{\sigma_2} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sigma_2}\right) = 0,99 = P(-2,5758 \leqslant Z \leqslant 2,5758)$.
D'après le cours, on sait que

$$P\left(-\frac{0,01}{\sigma_2} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sigma_2}\right) = P(-2,5758 \leqslant Z \leqslant 2,5758) \Leftrightarrow \frac{0,01}{\sigma_2} = 2,5758 \Leftrightarrow \sigma_2 = \frac{0,01}{2,5758}.$$

La calculatrice fournit alors

$$\boxed{\sigma_2 = 0,004 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par excès.}}$$

