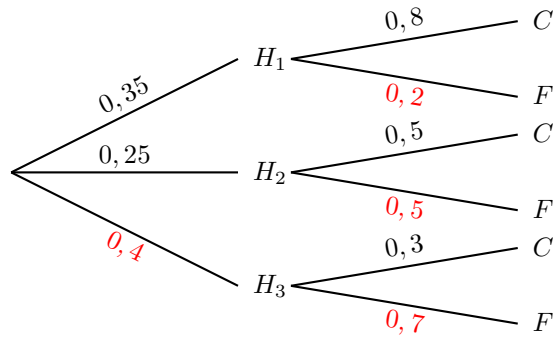


EXERCICE 1

1) a) Représentons la situation par un arbre.



b) La probabilité demandée est $p(C \cap H_3)$.

$$p(C \cap H_3) = p(H_3) \times p_{H_3}(C) = (1 - p(H_1) - p(H_2)) \times p_{H_3}(C) \\ = (1 - 0,35 - 0,25) \times 0,3 = 0,4 \times 0,3 = 0,12.$$

$$p(C \cap H_3) = 0,12.$$

c) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(C) = p(C \cap H_1) + p(C \cap H_2) + p(C \cap H_3) = p(H_1) \times p_{H_1}(C) + p(H_2) \times p_{H_2}(C) + p(H_3) \times p_{H_3}(C) \\ = 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,12 = 0,28 + 0,125 + 0,12 = 0,525.$$

$$p(C) = 0,525.$$

d) La probabilité demandée est $p_C(H_1)$.

$$p_C(H_1) = \frac{p(C \cap H_1)}{p(C)} = \frac{p(H_1) \times p_{H_1}(C)}{p(C)} = \frac{0,35 \times 0,8}{0,525} = 0,533 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

$$p_C(H_1).$$

2) a) X suit une loi binomiale. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées (choisir un arbre 10 fois) ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « l'arbre choisi est un conifère » avec une probabilité $p = 0,525$ (d'après la question 1)c)) et « l'arbre choisi n'est pas un conifère » avec une probabilité $1 - p = 0,475$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,525$.

b) La probabilité demandée est $p(X = 5)$. La calculatrice fournit

$$p(X = 5) = 0,243 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

c) La probabilité demandée est $p(X \leq 8)$. La calculatrice fournit

$$p(X \leq 8) = 0,984 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

EXERCICE 2

1) a) $f(1)$ est l'ordonnée du point B à savoir 2.

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C} en B . Cette tangente est la droite (BC) de coefficient directeur 0. Donc, $f'(1) = 0$.

$$f(1) = 2 \text{ et } f'(1) = 0.$$

b) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout réel strictement positif x ,

$$f'(x) = \frac{b \times \frac{1}{x} \times x - (a + b \ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{b - a - b \ln(x)}{x^2} = \frac{(b - a) - b \ln(x)}{x^2}.$$

$$\text{Pour tout réel } x > 0, f'(x) = \frac{(b - a) - b \ln(x)}{x^2}.$$

c) L'égalité $f(1) = 2$ s'écrit $\frac{a + b \ln(1)}{1} = 2$ ou encore $a = 2$.

L'égalité $f'(1) = 0$ s'écrit $\frac{(b - a) - b \ln(1)}{1^2} = 0$ ou encore $b - a = 0$ ou enfin $b = a = 2$.

$$\text{Pour tout réel } x > 0, f(x) = \frac{2 + 2 \ln(x)}{x^2}.$$

2) a) D'après la question b) appliquée avec $a = b = 2$, pour tout réel $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{-2 \ln(x)}{x^2}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{2}{x^2} > 0$ et donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-\ln(x)$. Le signe de $\ln(x)$ étant connu, on en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $]0, 1[$, strictement négative sur $]1, +\infty[$ et s'annule en 1.

b) **Limite en 0.** Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x}(2 + 2 \ln(x))$. On sait que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ et donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2 + 2 \ln(x)) = -\infty$. D'autre part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$. En multipliant, on obtient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.$$

Limite en $+\infty$. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \times \frac{\ln(x)}{x}$. D'après un théorème de croissances comparées,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + 2 \times \frac{\ln(x)}{x} \right) = 0 + 2 \times 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

c) Des deux questions précédentes, on déduit le tableau de variations de la fonction f .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 +	
f		$-\infty$ \nearrow 2 \searrow 0	

3) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0, 1[$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $\left] \lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(1) \right[=] - \infty, 2]$, il existe un réel x_0 et un seul de l'intervalle $]0, 1[$ tel que $f(x_0) = k$. Comme le réel 1 appartient à $] - \infty, 2]$, il existe un réel de $]0, 1[$ et un seul, noté α , tel que $f(\alpha) = 1$.

b) La calculatrice fournit $f(5) = 1,04\dots$ et $f(6) = 0,9\dots$. Donc, $f(5) > f(\beta) > f(6)$. Puisque la fonction f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que

$$5 < \beta < 6.$$

4) a)

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	

b) Les valeurs finales de a et de b affichées par cet algorithme sont les bornes d'un encadrement de α d'amplitude au plus 10^{-1} . La méthode utilisée pour obtenir cet encadrement est la méthode par dichotomie.

c) **Algorithme modifié.**

Variables :	a, b et m sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 5 Affecter à b la valeur 6
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$ Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$. Si $f(m) > 1$ alors affecter à a la valeur m . Sinon affecter à b la valeur m . Fin de Si.
Sortie :	Fin de Tant que Afficher a . Afficher b .

5) a) L'aire du rectangle $OABC$, exprimée en unités d'aires, est égale à $1 \times 2 = 2$. La moitié de cette aire est égale à 1.

Déterminons maintenant l'abscisse du point d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de l'axe (Ox) .

Soit x un réel strictement positif.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(1 + \ln(x))}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

Enfin, la fonction f est croissante sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ et, puisque $f\left(\frac{1}{e}\right) = 0$, on en déduit que la fonction f est positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Par suite, l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine du plan délimité par la courbe \mathcal{C} , l'axe (Ox) et la droite d'équation $x = 1$ est $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx$.

Finalement, la courbe \mathcal{C} partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales si et seulement si

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 1.$$

b) Calculons $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x} \times \ln(x)$ est de la forme $u' \times u$ avec pour tout $x > 0$, $u(x) = \ln(x)$.

On sait qu'une primitive de la fonction $u'u$ est la fonction $\frac{1}{2}u^2$ et donc

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(2 \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \right) dx = \left[2 \ln(x) + 2 \frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\
&= \left(2 \ln(1) + 2 \frac{(\ln(1))^2}{2} \right) - \left(2 \ln(1/e) + 2 \frac{(\ln(1/e))^2}{2} \right) \\
&= - \left(-2 + (-1)^2 \right) = 1.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 1.}$$

On a ainsi démontré que la courbe \mathcal{C} partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

EXERCICE 3

- 1) VRAI
- 2) FAUX
- 3) VRAI
- 4) VRAI

Justification 1. Soient A et B les points du plan d'affixes respectives i et -1 . Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z .

$$|z - i| = |z + 1| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB].$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AB]$ qui est effectivement une droite. La proposition 1 est vraie.

Justification 2.

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^4 &= \left((1 + i\sqrt{3})^2 \right)^2 = (1 + 2i\sqrt{3} - 3)^2 = (-2 + 2i\sqrt{3})^2 \\ &= 2^2 (-1 + i\sqrt{3})^2 = 4(1 - 2i\sqrt{3} - 3) = -8 - 8i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

La partie imaginaire de $(1 + i\sqrt{3})^4$ est $-8\sqrt{3}$ et en particulier n'est pas nulle. On en déduit que $(1 + i\sqrt{3})^4$ n'est pas un nombre réel. La proposition 2 est fautive.

Justification 3.

1ère solution. Tout d'abord

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}) \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BG}.$$

Puisque $ABCDEFGH$ est un cube, la droite (EF) est perpendiculaire aux droites (FB) et (FG) qui sont deux droites sécantes du plan (BFG) . On en déduit que la droite (EF) est orthogonale à toute droite du plan (BFG) et en particulier, la droite (EF) est orthogonale à la droite (BG) . Par suite, $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$.

D'autre part, la face $BCFG$ est un carré. Ses diagonales, à savoir $[FC]$ et $[BG]$ sont perpendiculaires. Par suite, $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$.

Mais alors,

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 + 0 = 0.$$

Ceci montre que les droites (EC) et (BG) sont orthogonales. La proposition 3 est vraie.

2ème solution. On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Le point E a pour coordonnées $(0, 0, 1)$ et le point C a pour coordonnées $(1, 1, 0)$. Donc le vecteur \overrightarrow{EC} a pour coordonnées $(1, 1, -1)$.

Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. Donc le vecteur \overrightarrow{BG} a pour coordonnées $(0, 1, 1)$. Ensuite

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0.$$

On retrouve ainsi le fait que les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.

Justification 4. Soient \mathcal{D} la droite passant par $S(1, -2, -2)$ et perpendiculaire au plan \mathcal{P} et Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Un vecteur normal au plan \mathcal{P} est le vecteur $\vec{n}(1, 1, 3)$. La droite \mathcal{D} est donc la droite de vecteur directeur $\vec{n}(1, 1, 3)$ passant par le point $S(1, -2, -2)$.

D'autre part, la droite Δ admet pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(1, 1, 3)$ et pour $t = -1$, on obtient

$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{cases}$ qui sont les coordonnées du point S . Donc Δ est aussi la droite de vecteur directeur $\vec{n}(1, 1, 3)$ passant

par le point $S(1, -2, -2)$. Finalement, $\mathcal{D} = \Delta$. La proposition 4 est vraie.

EXERCICE 4

1) Soit n un entier naturel. Le nombre de personnes habitant la ville l'année $2013 + n + 1$ est obtenu en retranchant au nombre v_n de personnes habitant la ville l'année $2013 + n$, 5% de ce nombre puis en ajoutant 1% du nombre c_n de personnes habitant la campagne l'année $2013 + n$. Par suite,

$$v_{n+1} = (v_n - 0,05v_n) + 0,01c_n = 0,95v_n + 0,01c_n.$$

De même,

$$c_{n+1} = (c_n - 0,01c_n) + 0,05v_n = 0,05v_n + 0,99c_n.$$

Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,95v_n + 0,01c_n$ et $c_{n+1} = 0,05v_n + 0,99c_n$.

2)

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a + 0,01b \\ 0,05a + 0,99b \end{pmatrix}.$$

3) a)

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times (-5) & 1 \times 1 + (-1) \times 1 \\ 5 \times 1 + 1 \times (-5) & 5 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6I, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} QP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 5 & 1 \times (-1) + 1 \times 1 \\ (-5) \times 1 + 1 \times 5 & (-5) \times (-1) + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6I. \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice P est inversible et que

$$P^{-1} = \frac{1}{6}Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4,7 & 0,94 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5,64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$P^{-1}AP = D \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix}.$$

c) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

- Puisque $D = P^{-1}AP$, on a encore $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = IAI = A$ et donc l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= PD^nIDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4) Puisque $-1 < 0,94 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{6}(v_0 + c_0) = \frac{250\,000}{6},$$

puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (250\,000 - v_n) = 250\,000 - \frac{250\,000}{6} = \frac{5 \times 250\,000}{6}.$$

A long terme, environ un sixième de la population globale (c'est-à-dire un sixième de 250 000 personnes) habitera en ville et les cinq sixièmes restants habiteront à la campagne.